POMORSKA LIGA ZADANIOWA *ZDOLNI Z POMORZA*

Konkurs dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych

województwa pomorskiego w roku szkolnym 2019/2020

Etap I – kwalifikacyjny

Przedmiot: matematyka

SCHEMAT OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Uwagi.

1. **W schemacie oceniania zapisano tylko przykładowe rozwiązania.**
2. **Za każdy inny poprawny sposób i pełne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.**

Zadanie 1. (0-5)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 15 = 2y - 1 \\ y^2 - 6y + 14 = 3z - 2 \\ z^2 - 5z + 13 = 4t - 3 \\ t^2 - 4t + 12 = x - 4 \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązanie:

Dodajemy obustronnie wszystkie równania i otrzymujemy:

$$x^2 - 7x + 15 + y^2 - 6y + 14 + z^2 - 5z + 13 + t^2 - 4t + 12 =$$
$$= 2y - 1 + 3z - 2 + 4t - 3 + x - 4$$

Przenosimy wyrazy na lewą stronę, grupujemy wg jednej zmiennej i wykorzystujemy wzory na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

różnicy dwóch wyrażeń:

$$(x^2 - 7x - x + 15 + 1) + (y^2 - 6y - 2y + 14 + 2) + (z^2 - 5z - 3z + 13 + 3)$$
$$+ (t^2 - 4t - 4t + 12 + 4) = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 + (t-4)^2 = 0$$

Ponieważ $(x-4)^2 \geq 0$, $(y-4)^2 \geq 0$, $(z-4)^2 \geq 0$, $(t-4)^2 \geq 0$, to suma kwadratów wyrażeń jest równa zero wtedy, gdy każdy ze składników tej sumy jest równy zero.

Tak więc: $(x-4)^2=0$, $(y-4)^2=0$, $(z-4)^2=0$, $(t-4)^2=0$,

a stąd otrzymujemy rozwiązanie równania: $x=y=z=t=4$.

Dla sprawdzenia, czy otrzymane wartości spełniają układ równań, podstawiamy je do każdego równania układu. Otrzymujemy równości fałszywe.

Czyli układ równań jest sprzeczny.

Odp.: Układ równań nie posiada rozwiązania.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania …………………………………………………………………………………………………. 1 p.

Wskazanie metody/strategii rozwiązania układu równań – albo dodanie równań stronami (sam zapis lub wyjaśnienie), albo wykorzystanie metody podstawiania (przynajmniej 1 podstawienie).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………………………… 2 p.

Przeniesienie wyrazów równania i przyrównanie do zera, odpowiednie pogrupowanie wyrazów, wskazujące na kolejny etap postępowania (czyli zastosowanie wzorów skróconego mnożenia)

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ………………………………..………………… 3 p.

Przekształcenie lewej strony równania do postaci sumy kwadratów wyrażeń:

$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2+(t-4)^2=0$

Rozwiązanie zadania prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………..…..… 4 p.

Uzasadnienie, że składowe sumy są nieujemne.

$(x-4)^2\geq 0$, $(y-4)^2\geq 0$, $(z-4)^2\geq 0$, $(t-4)^2\geq 0$

Wyliczenie wartości $x=y=z=t=4$. Podanie tych wartości jako rozwiązanie układu równań – bez sprawdzenia.

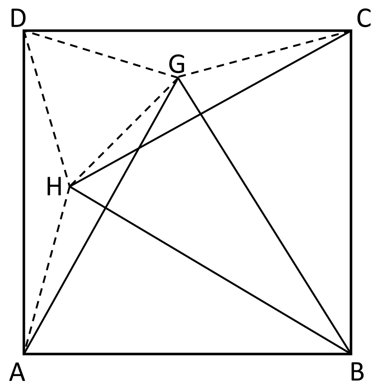
UWAGA: Należy uznać każdą poprawną metodę rozwiązania układu równań, która doprowadzi do wyznaczenia wartości x, y, z, t . Dopuszczalny błąd rachunkowy.

Rozwiązanie pełne …………………………………………………………………….………………… 5 p.

Sprawdzenie, czy liczby wyliczone wartości spełniają poszczególne równania układu, także podanie odpowiedzi (lub stwierdzenie), że układ jest sprzeczny *albo* że układ nie posiada rozwiązań.

Zadanie 2. (0-6)

Na bokach kwadratu ABCD o boku a zbudowano wewnątrz niego trójkąty równoboczne ABG i BCH. Wykaż, że trójkąt DGH jest trójkątem równobocznym. Oblicz pole tego trójkąta.



Przykładowe rozwiązanie:

(1) Rozpatrujemy trójkąty AGD i CHD:

- trójkąty te są równoramienne: |AD| = |AG| = a oraz |CD| = |CH| = a – wynika to z konstrukcji trójkątów równobocznych na bokach kwadratu;
- $\measuredangle DAG = \measuredangle HCD = 30^o$ – wynika to z konstrukcji trójkątów równobocznych wewnątrz kwadratu na jego bokach;
- czyli $\Delta AGD \equiv \Delta CHD$ (cecha bkb);
- z przystawania trójkątów wynika, że |DG| = |DH| = k (przyjmujemy oznaczenie na długość odcinków);
- można wyliczyć kąty przy podstawie tych trójkątów: $\measuredangle AGD = \measuredangle ADG = \measuredangle CDH = \measuredangle CHD = 75^o$.

Wiemy więc, że trójkąt DGH jest równoramienny.

(2) Rozpatrujemy trójkąty AHD i CGD:

- z symetrii względem osi zawierającej wysokości odpowiednich trójkątów równobocznych wynika, że |AH| = |DH| = k oraz |CG| = |DG| = k; $\measuredangle ADH = 90^o - \measuredangle CDH = 90^o - 75^o = 15^o$
- i analogicznie $\measuredangle CDG = 90^o - \measuredangle ADG = 90^o - 75^o = 15^o$;
- tak więc trójkąty są równoramienne o kątach przy podstawach AD i CD po 15^o.

(3) Rozpatrujemy kąty przy wierzchołku D kwadratu:

$\measuredangle ADH + \measuredangle HDG + \measuredangle CDG = 90^o$

$15^o + \measuredangle HDG + 15^o = 90^o \quad \Rightarrow \quad \measuredangle HDG = 60^o$

Wiemy więc, że trójkąt DGH jest równoramienny (ramiona DG| = |DH|), o kącie 60^o, zawartym między tymi ramionami oraz o podstawie GH.

Może być tylko jeden taki trójkąt. Trójkąt równoramienny DGH ma przy podstawie GH kąty po 60^o.

WNIOSEK: trójkąt DGH jest trójkątem równobocznym o bokach |DG| = |DH| = |GH| = k.

(4) Obliczamy pole trójkąta równobocznego DGH.

Aby wyliczyć np. długość boku DG trójkąta DGH, rozpatrujemy trójkąt DAG i stosujemy do niego twierdzenie cosinusów:

$$(DG)^2 = (AD)^2 + (AG)^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AG| \cdot cos(\measuredangle DAG)$$

$$k^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot cos(30^o) \;\Rightarrow\; k^2 = 2a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{k^2 = a^2\left(2 - \sqrt{3}\right)}$$

Korzystamy z wzoru na pole trójkąta równobocznego $P_\Delta = \frac{k^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie k – bok trójkąta DGH.

Podstawiamy do niego wyliczoną wartość k^2; otrzymujemy:

$$P_{\Delta DGH} = \frac{a^2\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\left(2\sqrt{3}-3\right)}{4}$$

Odp.: Trójkąt DGH jest trójkątem równobocznym, a jego pole jest równe $P_{\Delta DGH} = \frac{a^2\left(2\sqrt{3}-3\right)}{4}$, gdzie a jest bokiem kwadratu ABCD.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania …………………………………………………………………………………………………. 1 p.

Przedstawienie zadania w postaci rysunku, z oznaczeniami literowymi – na rysunku widoczny kwadrat, 2 trójkąty równoboczne i szukany trójkąt DGH.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………………………… 2 p.

Analiza trójkątów AGD i CHD – wykazanie, że trójkąty są równoramienne i przystające.

LUB: analiza trójkątów AHD i CGD – wykazanie, że są równoramienne i przystające.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………………………………… 3 p.

Analiza trójkątów AGD i CHD – wykazanie, że kąty przy podstawie mają po 75^o

LUB: analiza trójkątów AHD i CGD – wykazanie, że kąty przy podstawie mają po 15^o.

Rozwiązanie zadania prawie do końca …………………………………………………………… 4 p.

Analiza trójkąta DGH – wykazanie, że trójkąt jest równoboczny.

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………………… 5 p.

Zastosowanie twierdzenia cosinusów i wyliczenie długości boków trójkąta DGH.

Rozwiązanie pełne …………………………………………………………………………………… 6 p.

Obliczenie pola trójkąta równobocznego DGH, podanie poprawnej wartości pola trójkąta: $P_{\Delta DGH} = \frac{a^2\left(2\sqrt{3}-3\right)}{4}$.

Zadanie 3. (0-6)

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach symetryczną kostką sześcienną do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 4. Podaj wynik w postaci nieskracalnego ułamka.

Przykładowe rozwiązania:

Doświadczenie – czterokrotny rzut sześcienną kostką do gry.

Ω - przestrzeń (zbiór) zdarzeń elementarnych, liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych

$$|\Omega| = 6^4$$

A – zdarzenie sprzyjające: suma kwadratów liczby uzyskanych oczek (łącznie w 4 rzutach) będzie podzielna przez 4

P(A) – prawdopodobieństwo zdarzenia sprzyjającego

Przeanalizujemy teraz podzielność przez 4 kwadratów liczb poszczególnych liczby oczek, jakie wypadną podczas rzutu kostką

$1^2:4 = 0\, r.1$ $\qquad$ $2^2:4 = 1\, r.0$

$3^2:4 = 2\, r.1$ $\qquad$ $4^2:4 = 4\, r.0$

$5^2:4 = 6\, r.1$ $\qquad$ $6^2:4 = 9\, r.0$

Tak więc mamy 2 możliwości zdarzeń sprzyjających zdarzeniu:

(1) Zdarzenie A_1 – dowolny układ 4 wyników za zbioru {1,3,5} daje sumę kwadratów 4 dowolnych liczb podzielną przez 4
(2) Zdarzenie A_2 – dowolny układ 4 wyników ze zbioru {2,4,6} daje sumę kwadratów 4 dowolnych liczb podzielną przez 4

Zdarzenia A_1 i A_2 są rozłącznie, więc $A = A_1 \cup A_2$, gdyż jako zbiory rozłączne spełniają warunek $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 3^4 + 3^4 = 81 + 81 = 162$$

Tak więc: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{162}{6^4} = \frac{6\cdot 27}{6^4} = \frac{27}{6^3} = \frac{3^3}{(3\cdot 2)^3} = \frac{1}{8}$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że przy 4-krotnym rzucie kostką sześcienną suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 4, jest równe 1/8.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania …………………………………………………………...…………………………...……. 1 p

Określenie rodzaju doświadczenia i wyliczenie liczebności przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………..…………………….………… 2 p.

Analiza przypadków (zdarzeń elementarnych), które spełniają warunki zdarzenia sprzyjającemu A. Rozpatrywanie reszt z dzielenia przez 4.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………..…………….……. 4 p.

Wnioski dotyczące rozkładu ilości oczek, wypadających przy 4 rzutach, pod kątem, jaki układ spełnia warunek podzielności przez 4. Uzasadnienie i wskazanie 2 rozłącznych zbiorów liczb: zdarzenie A_1 – dowolny układ 4 wyników za zbioru {1,3,5}; zdarzenie A_2– dowolny układ 4 wyników ze zbioru {2,4,6}.

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………………… 5 p.

W tym również podanie odpowiedzi w postaci ułamka skracalnego lub wyrażenia z potęgą w mianowniku ułamka.

Rozwiązanie pełne ………………………………..…………………...……………………… 6 p.

Podanie prawdopodobieństwa zdarzenia A – w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{1}{8}$.

Zadanie 4. (0-6)

Z punktu A w kierunku do punktu B w dół rzeki wypłynęła łódka i tratwa. Łódka w ciągu 8 godzin dopłynęła do punktu B, a następnie wróciła w górę rzeki do punktu A, pokonując łącznie trasę długości 60 km. W drodze powrotnej w odległości 12 km od punktu A łódka napotkała płynącą tratwę. Z jaką prędkością poruszała się łódka, a z jaką prędkością tratwa?

Przykładowe rozwiązanie:

x – prędkość własna łódki ($x > 0$) $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$

y – prędkość nurtu rzeki czyli prędkość tratwy ($y > 0$) $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$

$x + y$ – prędkość łódki, płynącej w dół rzeki (z punktu A do punktu B) $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$

$x - y$ – prędkość łódki, płynącej w górę rzeki (z punktu B do punktu A) $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$

$\frac{30}{x+y}$ – czas, w jakim łódka przepłynie w dół rzeki (droga z punktu A do punktu B – 30 km)

$\frac{30}{x-y}$ – czas, w jakim łódka przepłynie w górę rzeki (droga z punktu B do punktu A)

$\frac{18}{x-y}$ – czas w jakim łódka przepłynie w górę rzeki z punktu B do momentu spotkania z tratwą (tratwa przepłynęła wtedy 12 km od punktu A)

$\frac{12}{y}$ – czas, w jakim tratwa przepłynie w dół rzeki z punktu A do momentu spotkania z tratwą.

Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} \frac{30}{x+y} + \frac{30}{x-y} = 8 \\ \frac{30}{x+y} + \frac{18}{x-y} = \frac{12}{y} \end{cases}$ (*)

$\begin{cases} \frac{30}{x+y} = 8 - \frac{30}{x-y} \\ \frac{30}{x+y} = \frac{12}{y} - \frac{18}{x-y} \end{cases} \Rightarrow 8 - \frac{30}{x-y} = \frac{12}{y} - \frac{18}{x-y} \Rightarrow \frac{8(x-y)-30}{(x-y)} = \frac{12(x-y)-18y}{y(x-y)}$

Korzystamy z własności proporcji lub poprzez sprowadzenie do wspólnego mianownika, otrzymujemy równanie z dwiema niewiadomymi:

$8y(x-y) - 30y = 12(x-y) - 18y$

Równanie przekształcamy do postaci, która uzależnia jedną niewiadomą od drugiej. Otrzymujemy wtedy:

$8xy - 12x = 8y^2 \Rightarrow x = \frac{8y^2}{8y-12} \Rightarrow x = \frac{2y^2}{2y-3}$ (**)

Równość (**) podstawiamy do dowolnego równania układu (*), przekształcamy je:

$\frac{30}{\frac{2y^2}{2y-3}+y} + \frac{30}{\frac{2y^2}{2y-3}-y} = 8 \Rightarrow \frac{30(2y-3)}{4y^2-3y} + \frac{30(2y-3)}{3y} = 8 \ /\cdot \frac{y}{2}$, gdzie $y > 0$

$\frac{15(2y-3)}{4y-3} + 5(2y-3) = 4y \Rightarrow 15(2y-3) = (4y-3)(-6y+15)$

Ostatecznie otrzymujemy równania kwadratowe niezupełne:

$24y^2 - 48y = 0 \Rightarrow 24y(y-2) = 0$

Stąd: (***) $\underline{y = 2}$ lub $\underline{y = 0}$ (sprzeczne z założeniem zadania).

Otrzymany wynik (***) podstawiamy do zależności (**) i otrzymujemy:

$$x = \frac{2 \cdot 2^2}{2 \cdot 2 - 3} = 8$$

Rozwiązaniem układu równań (*) jest para liczb: $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Odp.: Prędkość własna łódki wynosiła 8 km/h, a prędkość tratwy/prądu rzeki – 2 km/h.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ………………………………………………………………………………………………. 1 p.

Przyjęcie oznaczeń na prędkość własnej łódki i prędkość tratwy (prądu rzeki). Zapisanie, jaka jest prędkość łódki z prądem i pod prąd. Zapisanie 1 równania:

$\frac{30}{x+y} + \frac{30}{x-y} = 8$ LUB $\frac{30}{x+y} + \frac{18}{x-y} = \frac{12}{y}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………..……………… 2 p.

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} \frac{30}{x+y} + \frac{30}{x-y} = 8 \\ \frac{30}{x+y} + \frac{18}{x-y} = \frac{12}{y} \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………………………...…… 3 p.

Działania na równaniach z układu równań – przekształcenie do równania z 2 niewiadomymi.

Wyliczenie jednej niewiadomej w uzależnieniu od drugiej, np. $x = \frac{2y^2}{2y-3}$

Rozwiązanie zadania prawie do końca …………………………..……………….…...……… 4 p.

Podstawienie wyliczonej zmiennej do dowolnego równania układu i wyliczenie wartości jednej ze zmiennych.

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………………… 5 p.

Obliczenie wartości obu zmiennych, ale z pewnymi usterkami liczbowymi, wynikającymi z wcześniejszych przekształceń wzorów, sumowaniu wyrazów podobnych itp.

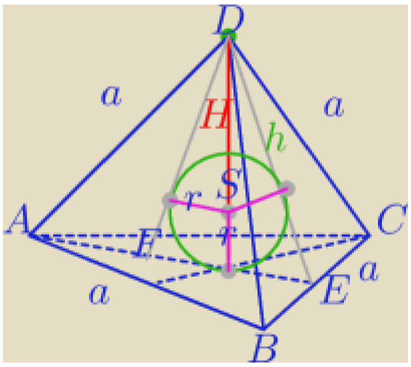
Rozwiązanie pełne …………………………………………………………………...…………… 6 p.

Podanie prędkości własnej łódki i prędkości tratwy, wraz z jednostkami miary: prędkość własna łódki $x = 8$ km/h i prędkość tratwy (prądu rzeki) $y = 2$ km/h .

Zadanie 5. (0-7)

Dany jest czworościan foremny o krawędzi 6 cm. Wpisano w niego kulę, a następnie w każdy róg czworościanu wpisano kolejne kule, styczne do już wpisanej kuli i trzech ścian czworościanu o wspólnym wierzchołku. Z kolei w każdy róg czworościanu wpisano kolejne mniejsze kule, styczne do najbliższej już wpisanej kuli i trzech ścian czworościanu o wspólnym wierzchołku. Oblicz sumę objętości wszystkich kul wpisanych w ten czworościan foremny.

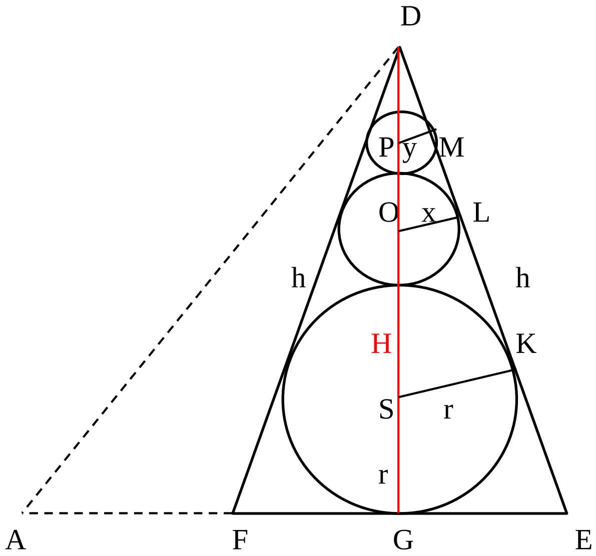
<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>



Kula wpisana w czworościan foremny jest styczna do wszystkich czterech ścian czworościanu. Punktami styczności kuli i ścian czworościanu są punkty przecięcia wysokości tych ścian. Punkty te są jednocześnie spodkami 4 wysokości czworościanu, opuszczonych z wierzchołka na przeciwległą ścianę.

Dokonujemy przekroju czworościanu foremnego płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną AD i wysokość DE ściany bocznej BCD.

Rozważamy jeden z 4 przypadków: kulę wpisaną w czworościan ABCD oraz mniejsze kule wpisane powyżej niej – sytuację tę przedstawia poniższy rysunek.



Zgodnie z treścią zadania krawędź $a = 6$. Stąd wysokości ścian mają długość $h = 3\sqrt{3}$, a odcinek $|GE| = |KE| = \sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEG0

$$H^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2$$

możemy wyliczyć długość wysokości czworościanu $H = 2\sqrt{6}$.

Z podobieństwa trójkątów DEG i DKS (cecha kk) wynika, że:

$$\frac{|DG|}{|GE|} = \frac{|DK|}{|SK|}, \text{ gdzie } \quad |DK| = \tfrac{2}{3}|DE| = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{r}$$

Zatem $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Kolejne kule będą styczne do ściany BCD czworościanu w punktach L i M leżących na wysokości DE ściany bocznej.

Z podobieństwa trójkątów DEG i DOL (cecha kk) wynika, że:

$$\frac{|DE|}{|GE|}=\frac{|DO|}{|LO|},\ \text{gdzie}\ \ |DO|+x=|DG|-2r=2\sqrt{6}-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-x}{x}$$

Zatem $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Z podobieństwa trójkątów DEG i DPM (cecha kk) wynika, że:

$$\frac{|DE|}{|GE|}=\frac{|DP|}{|MP|},\ \text{gdzie}\ \ |DP|+y=|DG|-2r-2x=2\sqrt{6}-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-y}{y}$$

Zatem $y=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

Obliczając sumę objętości wszystkich kul wpisanych, uwzględniamy jedną kulę o promieniu *r* oraz po cztery kule o promieniach *x* i *y*, po jednej w każdym wierzchołku czworościanu.

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3+4\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3+4\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right)^3$$

Odp.: $\boldsymbol{V=\frac{25}{16}\pi\sqrt{6}}$ [cm^3]

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ……. 2 p.

Wykonanie rysunku, na którym przedstawiono sposób wpisywania kolejnych kul w czworościan foremny (w postaci trójwymiarowej lub w formie przekroju) (1 p.) i obliczenie wysokości czworościanu foremnego $H=2\sqrt{6}$ (1 p.).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ………………………………..……….…………………… 3 p.

Obliczenie promienia *r* największej kuli wpisanej w czworościan foremny: $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …………………………………..……...……… 5 p.

Obliczenie promienia *x* kolejnej kuli wpisanej w czworościan foremny: $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$ (1p.)

Obliczenie promienia *y* najmniejszej z kul wpisanych w czworościan foremny: $y=\frac{\sqrt{6}}{8}$ (1 p.)

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……….……………….…….… 6 p.

Poprawna metoda obliczenia sumy objętości wszystkich kul wpisanych w czworościan.

Rozwiązanie pełne …………………………………….………………………………………… 7 p.

Obliczenie sumy objętości wszystkich kul wpisanych w czworościan: $V = \frac{25}{16}\pi\sqrt{6}$