POMORSKA LIGA ZADANIOWA *ZDOLNI Z POMORZA*

Konkurs dla uczniów klas VII i VIII szkół podstawowych

województwa pomorskiego w roku szkolnym 2019/2020

Etap I – kwalifikacyjny

Przedmiot: matematyka

SCHEMAT OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Uwagi.

1. **W schemacie oceniania zapisano tylko przykładowe rozwiązania.**
2. **Za każdy inny poprawny sposób i pełne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.**

Zadanie 1. (0-6)

Na wiosenną wystawę kwiatów przygotowano tulipany. Jest ich więcej niż 150, ale mniej niż 200. Do transportu kwiatów wykorzystano mniejsze i większe pojemniki, które mogły pomieścić odpowiednio 8 lub 10 sztuk roślin. Gdyby zapakowano je tylko do większych pojemników, zostałyby 4 kwiaty, a gdyby tylko do mniejszych pojemników, także zostałyby 4 kwiaty. Ile tulipanów wysłano na wystawę?
Jak można dobrać mniejsze i większe pojemniki, aby je wypełnić i aby wszystkie kwiaty były zapakowane? Podaj wszystkie możliwości. Zapisz swój tok myślenia

Przykładowe rozwiązanie:

Skoro przy pakowaniu po 8 i po 10 sztuk zostały 4 kwiaty, to znaczy, że liczba tulipanów zarówno przy dzieleniu przez 8 jak i przy dzieleniu przez 10 daje resztę 4. To oznacza, że liczba tulipanów pomniejszona o 4 dzieli się zarówno przez 8, jak i przez 10.

Wspólne wielokrotności liczb 8 i 10 to: 40, 80, 120, 160, 200, … Stąd możliwe ilości tulipanów to: 44, 84, 124, 164, 204, …

Spośród nich tylko liczba 164 spełnia warunek zadania.

Możliwe „układy” opakowań:

Liczba tulipanów w pojemnikach po 8 szt.	Liczba tulipanów w pojemnikach po 10 szt.	Liczba pojemników po 8 szt.	Liczba pojemników po 10 szt.
24	140	3	14
64	100	8	10
104	60	13	6
144	20	18	2

Odp.: Do zapakowania było 164 kwiatów. Można je spakować na 4 sposoby – pokazuje je powyższa tabela.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ……. 1 p.

Stwierdzenie, że liczba tulipanów przy dzieleniu przez 8 i przez 10 daje resztę 4

LUB

Stwierdzenie, że liczba tulipanów pomniejszona o 4 dzieli się przez 8 i przez 10 (jest wspólną wielokrotnością liczb 8 i 10)

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………...…….……… 2 p.

Wyznaczenie liczby tulipanów: 164

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………………………....…...…… 3 p.

Wypisanie 2 spośród 4 możliwości zapakowania tulipanów

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ………..……………….……..… 4 p.

Wypisanie 3 spośród 4 możliwości zapakowania tulipanów.

Rozwiązanie pełne ……………………………………………………………..…………………… 6 p.

Wypisanie wszystkich 4 możliwości zapakowania tulipanów.

Zadanie 2. (0-6)

Z miejscowości A i B, które są oddalone od siebie o 35 kilometrów, wyjechali o tej samej porze dwaj rowerzyści. Rowerzyści spotkali się po 75 minutach. Rowerzysta, jadący z miejscowości A, poruszał się z prędkością o 25% mniejszą niż rowerzysta, jadący z miejscowości B. Ile czasu od momentu spotkania będzie jeszcze jechał do miejscowości B rowerzysta, jadący z miejscowości A do miejscowości B? Przedstaw obliczenia i podaj wynik.

Przykładowe rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia:

x – prędkość rowerzysty jadącego z miejscowości B w $\frac{km}{h}$

$\frac{3}{4}x$ – prędkość rowerzysty jadącego z miejscowości A w $\frac{km}{h}$

Ponieważ rowerzyści wyjechali w tym samym czasie, to ich wspólna droga pokonana przez 75 minut, czyli $\frac{5}{4}$ godziny, to 35 km. Możemy zapisać równanie:

$$\frac{3}{4}x \cdot \frac{5}{4} + x \cdot \frac{5}{4} = 35$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy $x = 16\left[\frac{km}{h}\right]$. Jest to prędkość rowerzysty jadącego z miejscowości B. Stąd prędkość rowerzysty jadącego z miejscowości A wynosi $12\frac{km}{h}$.

Obliczając drogę przejechaną przez rowerzystów do momentu spotkania, otrzymujemy $s_A = 15$ km i $s_B = 20$ km. Zatem rowerzysta jadący z miejscowości A, ma jeszcze do przejechania 20 km.

Potrzebuje na to $t_A = \frac{20km}{12\frac{km}{h}} = 1\frac{2}{3}\text{h} = 1\text{h } 40 \text{ min} = 100 \text{ min}$.

<u>**Odp.:**</u> Rowerzysta jadący z miejscowości A do miejscowości B, od momentu spotkania z drugim rowerzystą, będzie jeszcze jechał 100 min, aby dojechać do miejscowości B.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ………………………………………………….……………………………………………...……. 1 p.

Uzależnienie prędkości obu rowerzystów od jednej zmiennej

LUB

Uzależnienie drogi przejechanej do momentu spotkania przez każdego z rowerzystów od jednej zmiennej

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………...…………….………… 2 p.

Zapisanie równania pozwalającego obliczyć prędkość jednego z rowerzystów

LUB

Zapisanie równania pozwalającego obliczyć drogę przejechaną do momentu spotkania przez jednego z rowerzystów

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………….…………………….……… 4 p.

Obliczenie prędkości obydwu rowerzystów: $v_B = 16\frac{km}{h}$, $v_A = 12\frac{km}{h}$ (po 1 p. za każdą prędkość).

LUB

Obliczenie drogi przejechanej do momentu spotkania przez jednego z rowerzystów (rozwiązanie równania – 1p.) i wyznaczenie drogi pozostałej do przejechania przez rowerzystę jadącego do miejscowości B (1p.)

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ………………………….……… 5 p.

Obliczenie drogi, jaką musi pokonać od momentu spotkania rowerzysta jadący z miejscowości A do B: 20 km

LUB

Obliczenie prędkości rowerzysty jadącego z miejscowości A: $12\,\frac{km}{h}$

Rozwiązanie pełne ……………………………………..………...………………………… 6 p.

Obliczenie czasu potrzebnego rowerzyście jadącemu z miejscowości A na dojechanie do miejscowości B: $1\frac{2}{3}\mathrm{h} = 1\mathrm{h}\ 40\ \mathrm{min} = 100\ \mathrm{min}$

UWAGA: Uczeń może wykonać obliczenia dowolną metodą, np. proporcji.

Zadanie 3. (0-5)

Dane są odcinki o długościach $\left(\frac{3}{2}\right)^{2018}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2019}$ i $\left(\frac{3}{2}\right)^{2020}$. Czy z tych odcinków można zbudować trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

Przykładowe rozwiązania:

Warunek istnienia trójkąta o bokach *a, b, c*:

$a - b < c < a + b$

$a - c < b < a + c$

$b - c < a < b + c$

Warunek wystarczający: Jeżeli $a < b < c$ i $a + b > c$, to trójkąt istnieje.

Ponieważ $\frac{3}{2} > 1$, to na mocy twierdzenia ustalamy, że długości odcinków spełniają warunek;:
$\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} < \left(\frac{3}{2}\right)^{2019} < \left(\frac{3}{2}\right)^{2020}$.

Jako najdłuższy bok obieramy odcinek o długości $\left(\frac{3}{2}\right)^{2020}$ i zapisujemy warunek, jaki muszą spełniać podane długości odcinków, aby można z nich zbudować trójkąt (nierówność trójkąta):

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2019} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2020}$$

Przekształcamy lewą i prawą stronę nierówności do postaci pozwalających na łatwe ich porównanie:

$$L = \left(\frac{3}{2}\right)^{2018} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2019} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2018} + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} = 2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018}$$

$$P = \left(\frac{3}{2}\right)^{2020} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} = \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} = 2\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018}$$

Teraz porównując otrzymane wyniki stwierdzamy, że:

$$2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} > 2\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2018}$$

Tak więc L > P, co należało wykazać.

Stąd dostajemy odpowiedź, że z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

<u>Odp.:</u> Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania …….……………………………………………………..……………………………...……. 1 p

Uporządkowanie długości odcinków w sposób malejący lub rosnący

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………...…………….…………… 2 p.

Zapisanie warunku, jaki muszą spełniać podane długości odcinków, aby można z nich zbudować trójkąt.

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………….……… 4 p.

Doprowadzenie każdej ze stron nierówności do postaci pozwalającej na porównanie ich wielkości.
Rozwiązanie pełne ………………………………..…………………...……………………… 5 p.

Porównanie otrzymanych wyników i stwierdzenie, że z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt.

Zadanie 4. (0-6)

Zbudowano ciąg 2020 liczb całkowitych, zapisany w ten sposób, że:

a) pierwszą liczbą ciągu jest liczba 2;

b) każda liczba, oprócz pierwszej i ostatniej, jest sumą dwóch liczb sąsiednich.

Ile wynosi ostatnia liczba w tym ciągu? Przedstaw obliczenia i uzasadnienie.

Przykładowe rozwiązanie:

1) Jako pierwszą liczbę w ciągu przyjmujemy liczbę 2 (= a_1). Jako trzecią liczbę w ciągu przyjmujemy liczbę x (= a_3). Wiemy, że $a_2 = a_1 + a_3$, wtedy drugą liczbą w ciągu jest $a_2 = (2 + x)$.

2) Drugą liczbą w ciągu jest $a_2 = (2 + x)$, trzecią liczbą jest liczba $a_3 = x$, tzn. szukana czwarta liczba ciągu jest w następującej relacji z pozostałymi: $a_3 = a_2 + a_4$ czyli $x = (2 + x) + a_4$. Stąd $a_4 = -2$.

3) Kolejny krok, tj. $a_4 = a_3 + a_5$ czyli $-2 = x + a_5$. Stąd $a_5 = -2 - x$.

4) Kolejny krok, tj. $a_5 = a_4 + a_6$ czyli $-2 - x = -2 + a_6$. Stąd $a_6 = -x$.

5) Kolejny krok, tj. $a_6 = a_5 + a_7$ czyli $-x = -2 - x + a_7$. Stąd $a_7 = 2$.

6) Kolejny krok, tj. $a_7 = a_6 + a_8$ czyli $2 = -x + a_8$. Stąd $a_8 = 2 + x$.

Zauważamy pewną prawidłowość w ciągu liczb: 2, 2 + x, x, – 2, – 2 – x, – x, 2, 2 + x … itp. czyli powtarzający się 6-wyrazowy ciąg liczb.

Sprawdzamy, ile jest tych 6-wyrazowych ciągów w danym ciągu 2020 liczb całkowitych.

2020 : 6 = 336 r. 4 , tak więc mamy 336 pełnych powtarzających się 6-wyrazowych ciągów i jeszcze 4 wyrazy kolejnego (niekompletnego) ciągu.

Ten czwarty wyraz jest równy – 2 .

Odp.: $a_{2020} = -2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ……………………………………………………………………………………………………. 1 p.

Pokazanie strategii kolejnych liczb ciągu, wyliczenie kilku pierwszych liczb ciągu (bez pierwszej liczby)

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………...……….…… 2 p.

Wyliczenie pierwszych 7 lub 8 lub 9 liczb ciągu (przy przyjętej strategii)

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …………………………………………...…… 4 p.

Zauważenie pewnej prawidłowości, Wyliczenie liczby zbiorów 6-elementowych i określenie liczby elementów w ostatnim zbiorze (dzielenie przez 6 i określenie reszty z dzielenia).

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………….…… 5 p.

Wskazanie 4-go elementu w zbiorze 6-elementowym. Dopuszczalna pomyłka we wskazaniu tego elementu (wynikająca np. z błędu przepisania, z innej strategii itp.)

Rozwiązanie pełne ………………………………………………………………....…………… 6 p.

Podanie ostatniego elementu ciągu 2020 liczb całkowitych – $a_{2020} = -2$.

Zadanie 5. (0-7)

Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego:

$$3\frac{1}{2019}\cdot 2\frac{1}{2020}+1\frac{2019}{2020}\cdot 1\frac{1}{2019}-2\cdot\left(\frac{2}{2019}+\frac{1}{2020}\right)=$$

<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

Przyjmujemy oznaczenia: $a=\frac{1}{2019}$, $b=\frac{1}{2020}$.

Wtedy wyrażenie arytmetyczne przyjmuje postać:

$(3+a)(2+b)+(2-b)(1+a)-2\cdot(2a+b)=$

Wykonujemy działania na wielomianach, redukujemy wyrazy podobne:

$=6+3b+2a+ab+2+2a-b-ab-4a-2b=8$

<u>Odp.:</u> Wynikiem wyrażenia arytmetycznego jest 8.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ……………………………………………………………………………………………………. 1 p.

Przedstawienie strategii rozwiązania: zauważanie pewnej prawidłowości w zapisie liczb w wyrażeniu arytmetycznym i przyjęcie pewnych wartości czyli $a=\frac{1}{2019}$ i $b=\frac{1}{2020}$

LUB

zapis w innej formie, wskazującej, że istnieje pewna strategia/metoda do podjęcia obliczeń arytmetycznych

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………...………….………………… 3 p.

Zapisanie wyrażenia arytmetycznego przy użyciu przyjętych zmiennych

LUB

inna forma zapisu, w której np. uwzględniono rozbicie liczb na sumę dwóch składowych liczb

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ………………………...………………....……… 5 p.

Przekształcenie wyrażenia algebraicznego (przemnożenie sum algebraicznych – 1p.) i redukcja wyrazów podobnych (1 p.)

Rozwiązanie prawie pełne albo rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……..……………….….…. 6 p.

Podanie błędnej wartości wyrażenia , wynikającej z błędów przeliczenia lub przepisania (tzw. błąd nieuwagi)

Rozwiązanie pełne …………………………………………..……………………………… 7 p.

Podanie poprawnej wartości wyrażenia arytmetycznego