

Jerzy Paczkowski

Continuum edukacji matematycznej (część I)

CONTINUUM CZYLI CIĄGŁOŚĆ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W SZKOLE PODSTAWOWEJ

Narzekamy na przeładowanie treściami nauczania w podstawie programowej matematyki 8-letniej szkoły podstawowej. Z własnego doświadczenia pamiętam, że w latach 70-80 ubiegłego wieku w programach nauczania 8-letniej szkoły podstawowej przez wiele lat występowały takie zagadnienia, jak: (1) funkcja liniowa, (2) rozwiązywanie algebraiczne i geometryczne układów 2 równań z 2 niewiadomymi, (3) funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym, (4) funkcja kwadratowa – wykres, przekształcanie wykresów, rozwiązywanie równań, (5) statystyka i rachunek prawdopodobieństwa – proste przypadki zliczania. Mimo to udawało się zrealizować cały program. Fakt – było więcej godzin w cyklu edukacyjnym na lekcje matematyki.

Obowiązujące podstawy programowe dla 8-letniej szkoły podstawowej zarówno dla 4 i 5-letniej szkoły ponadpodstawowej (także dla szkół ponadgimnazjalnych), zawierają treści nauczania, które należy zrealizować w całym cyklu edukacyjnym, a których stopień opanowania przez uczniów będzie weryfikowany na egzaminie końcowym¹.

W roku szkolnym 2020/2021 w związku z trwającą pandemią koronawirusa, trochę ograniczono zakres treści/wymagań na egzaminie ósmoklasisty i na egzaminie maturalnym². Nie zwalnia to jednak nikogo z uczących nauczycieli z obowiązku realizacji całej podstawy programowej dla szkół podstawowych i średnich.

Warto z bliskiej perspektywy ostatnich 4 lat wdrażania nowej podstawy programowej przyjrzeć się, jakie zachodzą zależności między edukacją matematyczną w przedszkolu, w klasach 1-3 i 4-8 szkoły podstawowej i w szkole ponadpodstawowej, analizując obowiązujące podstawy programowe.

Na każdym z tych etapów rozwoju młodego człowieka możemy mówić o kształtowaniu myślenia matematycznego, dostosowanego do możliwości rozwojowych i percepcyjnych:

- a) **przedszkole** – orientacja w bliskiej rzeczywistości matematycznej, której celem jest wyartykułowanie potrzeb dziecka³,
- b) **edukacja wczesnoszkolna** – orientacja w bliskiej i dalszej rzeczywistości matematycznej, oparta na konkretnym działaniu⁴,
- c) **edukacja w szkole podstawowej** – tu możemy mówić, jakby o 2 etapach rozwojowych ucznia (etap myślenia konkretnego i etap myślenia abstrakcyjnego),
- d) **edukacja w szkole ponadpodstawowej** – naukowa systematyzacja wiedzy matematycznej w powiązaniu z innymi dziedzinami wiedzy.

Wczesnoszkolna edukacja matematyczna

Porównanie treści nauczania matematyki w klasach 1-3 i w klasach 4-8 szkoły podstawowej, zawartych w podstawie programowej, pokazuje, jak nowe zagadnienia, realizowane w pierwszych latach w klasach starszych, są mocno osadzone w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej. (Tabela 1)

W edukacji wczesnoszkolnej **należy skupić się na praktycznej edukacji matematycznej**, takiej „namacalnej”, możliwej do sprawdzenia, zweryfikowania. Powyższe zestawienie wskazuje też na kompatybilność treści matematycznych w edukacji wczesnoszkolnej i w klasach wyższych szkoły podstawowej, w szczególności w klasach IV-VI. Istotne jednak jest, aby na każdym etapie edukacyjnym (w młodszych i starszych klasach szkoły podstawowej) mówić tym samym lub zbliżonym językiem matematycznym, operować pojęciami, które we wczesnym nauczaniu najczęściej powinny mieć charakter praktyczny, a niekoniecznie muszą być nazwane *explicite* (w sposób dosłowny, precyzyjny). Matematyczny język komunikacji w klasach I-III powinien być zrozumiały dla ucznia.

Tabela 1. Porównanie treści nauczania z matematyki w szkole podstawowej

Klasy 1-3 SP	Klasy 4-8 SP
Rozwiązuje równania z niewiadomą zapisaną w postaci okienka.	Układa i rozwiązuje równania z jedną niewiadomą [<i>uwaga: dowolne oznaczenie zmiennej; także możliwość zgadywania rozwiązania równania</i>].
Półowa, pół litra, dwie połówki, dwa i pół [<i>pięć poówek</i>].	$\frac{2}{2} = 1$, jedna druga, dwa i jedna druga, pięć drugich.
Cztery równe części, czwarta część, ćwierć, ćwierć litra [<i>połowa to 2 ćwierci</i>].	$\frac{4}{4} = 1$, jedna czwarta, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
15 stopni ciepła (+15°), 3 stopnie mrozu (-3°) – oznaczanie na skali termometru.	Liczby całkowite na osi liczbowej.
Kreślenie figur [<i>obwiedź ołówkiem tę figurę, zmierz odpowiednie długości, oblicz jej obwód</i>].	Obliczanie obwodu figury.
Rozpoznaje, wyodrębnia, rysuje figury, wykorzystuje sieć kwadratową [<i>ile kwadracików zawiera ten prostokąt? jakie jest pole tego prostokąta? jaki jest obwód tego prostokąta?</i>]. [<i>rozpoznaje trójkąty, kwadraty, prostokąty, koła</i>].	Obliczanie obwodu lub pola prostokąta, kwadratu [<i>praktyczne, w sieci kwadratowej lub przy przyjętej wielkości odcinka lub kwadracika jednostkowego</i>]. Rozpoznaje elementy koła/okręgu; oblicza pole i obwód.
Mierzenie długości odcinków, boków figur geometrycznych itp.; podaje wynik pomiaru, posługując się jednostkami długości: centymetr, metr, milimetr; wyjaśnia związki między jednostkami długości; posługuje się wyrażeniami dwumianowymi; wyjaśnia pojęcie kilometr.	Przeliczanie jednostek długości, pola, objętości w postaci dwumianowanej na postać jednomianowaną.

Legenda: kursywą zapisano dopełnienie treści z punktu widzenia dalszego etapu kształcenia, przykładowe stosowanie pojęć, uwagi i komentarz [J.P.]

Edukacja matematyczna w wyższych klasach szkoły podstawowej

W komentarzu dot. warunków sposobu realizacji podstawy programowej z matematyki w klasach IV-VIII, autorzy podstawy zwracają uwagę na potrzebę dostosowania metody pracy z uczniem do jego rozwoju umysłowego.

W klasach IV-VI nauka matematyki powinna odbywać się przede wszystkim **na konkretnych obiektach i przykładach**, z możliwością eksperymentowania z liczbami, z wykorzystaniem zagadek logicznych i logiczno-matematycznych. Wskazane są także ćwiczenia polegające na pracy lub zabawie z różnymi figurami lub bryłami w geometrii. Dopuszcza się jako poprawną metodę rozwiązywanie równań przez zgadywanie.

Natomiast **w klasach VII-VIII można rozwijać u uczniów myślenie abstrakcyjne**. Psychologowie twierdzą, że kształtuje się ono w wieku 11-15 lat, ale u wielu dzieci w różnym tempie – u jednych wolniej, u innych szybciej, z bardziej płynnym lub skokowym przejściem od myślenia konkretnego do abstrakcyjnego. Wtedy uczniom, u których to myślenie rozwinęło się szybciej, należy proponować zadania trudniejsze i pozwalające na głębszą analizę zagadnień, aby właściwie stymulować ich rozwój.

Podkreśla się, że **na wszystkich etapach kształcenia matematycznego należy mówić i operować zblizonym językiem matematycznym**. W komentarzu do podstawy programowej z matematyki autorzy zalecają w klasach IV-VI szczególną ostrożność przy wymaganii od ucznia ścisłości języka matematycznego. Należy dbać o precyzję wypowiedzi, ale nie można wymagać od ucznia, aby potrafił np. wyrazić poprawne rozwiązanie zadania/problemu w sposób odpowiednio formalny, zgodnie z oczekiwaniami nauczyciela. Umiejętność posługiwania się pojęciami matematycznymi (jak: kąt, długość, pole, suma algebraiczna) jest o wiele bardziej cenna niż zapamiętanie formalnej definicji. W nauczaniu matematyki w szkole podstawowej istotne jest, aby uczeń zrozumiał sens reguł formalnych.

Takim przykładem kształtowania i rozwoju języka matematycznego uczniów mogą być zagadnienia związane z funkcją. **Funkcji – jako takiej – nie ma w podstawie programowej SP (2017)**. Jednakże pojęcie funkcji w szkole podstawowej oraz związany z nią język i operacje, występują w tzw. „postaci ukrytej”, np. w diagramach i wykresach, na matematyce i na lekcjach przedmiotów przyrodniczych. Analiza i interpretacja zmian ilościowych na wykresach zawsze odnosi się do tego, w jakich granicach to się dzieje, w jakim czasie („w jakim przedziale”). Uczeń odczytuje, interpretuje i omawia diagramy, opisuje na ich podstawie zjawiska i określa przebieg zmiany

wartości danych, na przykład z użyciem określenia „wartości rosną”, „wartości maleją”, „wartości są takie same” („przyjmowana wartość jest stała”). A to już wiąże się ze zmiennością funkcji w przedziałach⁵. Takie ujęcie zagadnień jest wprowadzeniem do rozumienia i interpretacji funkcji w szkole ponadpodstawowej.

Poniżej przedstawiono układ matematycznych treści nauczania w klasach 4-8 szkoły podstawowej, w którym uwzględniono zakres treści programowych i czas realizacji (klasę). Matryca została opracowana na podstawie propozycji wydawnictwa Nowa Era.

Tabela 2. Realizacja treści nauczania z matematyki w klasach 4-8 szkoły podstawowej – z podziałem na klasy

Działy/trzęci nauczania zawarte w podstawie programowej kształcenia ogólnego w 8-letniej SP	Klasa – SP				
	4	5	6	7	8
Cyfry rzymskie – 2 lata (IV,V)	x	x			
Skala, czytanie map – 2 lata (IV,VI)	x		x		
Procenty – 2 lata (VI,VII)			x	x	kk
Liczby naturalne – 2 lata (IV,V)	x	x	kk	kk	Kk
Potęgi i pierwiastki – 2 lata (potęgi IV; potęgi i pierwiastki VIII)	x			x	Kk
Ułamki zwykłe – 2 lata (IV,V)	x	x	kk	kk	Kk
Ułamki dziesiętne – 2 lata (IV,V)	x	x	kk	kk	Kk
Ułamki na osi liczbowej – 2 lata (IV,V) (*)	x	x	kk	kk	Kk
Liczby całkowite, wymierne na osi liczbowej – 1 rok (V) (*)		x	kk	kk	Kk
Liczby całkowite, wymierne – 1 rok (VI)			x	kk	kk
Wyrażenia algebraiczne i równania – 3 lata (VI,VII,VIII)			x	x	x
Oś liczbowej (ułamki na osi) – 2 lata (IV,V) (*)	x	x			
Os liczbowe (liczby całkowite, wymierne na osi) – 1 rok (V) (*)		x			
Układ współrzędnych; punkty, odcinki, wielokąty – 1 rok (VII)				x	?
Odbicia, symetrie, przystawianie figur – 2 lata (IV,VIII)	x				x
Koła i okręgi – 2 lata (IV,VIII)	x				x
Kąty, rodzaje, porównywanie, kąty w wielokątach – 4 lata (IV,V,VII,VIII)	x	x		x	x
Rozpoznawanie wielokątów – 2 lata (IV, V)	x	x	kk		kk
Obwody figur – 1 rok (IV)	x	kk	kk	kk	kk
Pola wielokątów – 3 lata (IV,V,VI)	x	x	x	kk	kk
Twierdzenie Pitagorasa – 1 rok (VII)				x	kk
Rozpoznawanie brył – 1 rok (IV)	x	kk	kk		kk
Pola powierzchni brył – 3 lata (V,VI,VIII)		x	x		x
Objętość brył – 3 lata (V,VI,VIII)		x	x		x
Zbieranie danych, diagramy, rach. prawdopodobieństwa – 2 lata (VI,VIII)			x		x
Średnia arytmetyczna – 2 lata (V,VIII)		x			x

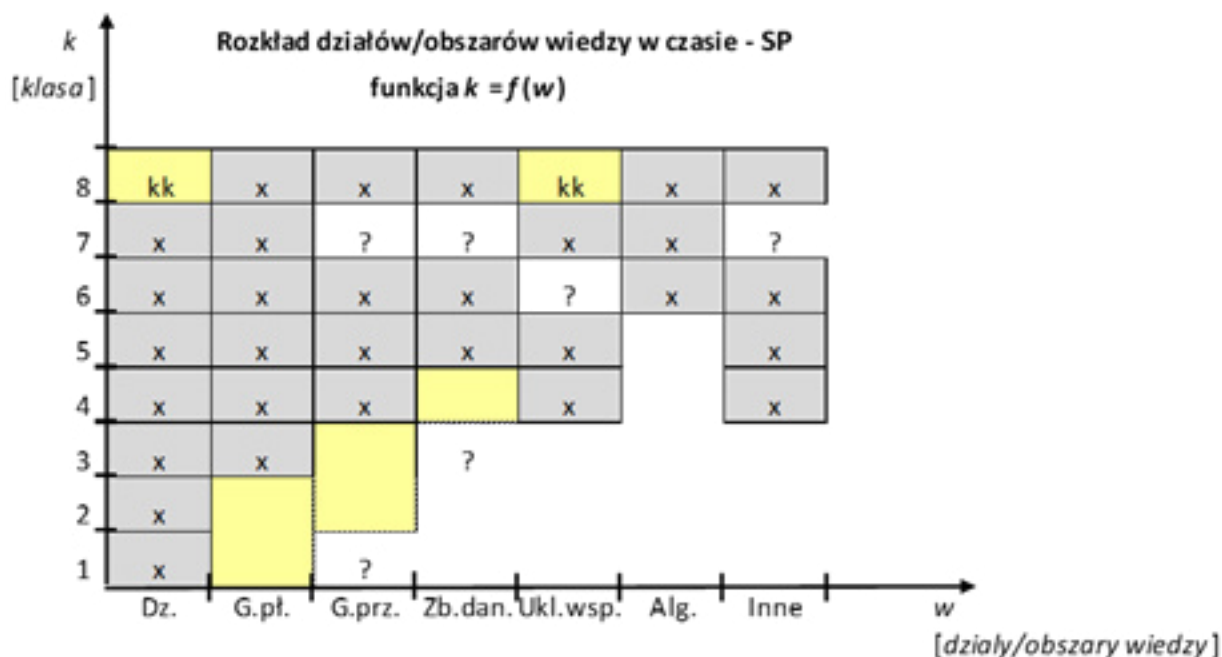
Legenda: x – realizacja działu/trzęci programowych w danej klasie; kk – wykorzystanie i kontynuacja treści programowych w klasach wyższych

Źródło: *Matematyka z kluczem. Program nauczania matematyki dla klas 4-8 szkoły podstawowej, Układ treści w klasach 4-8 szkoły podstawowej*, Wydawnictwo „Nowa Era” [opr. własne]

Matryca pokazuje, jak treści nauczania są kontynuowane i poszerzane w kolejnych klasach cyklu edukacyjnego. W matrycy nie uwzględniono liczby godzin, przeznaczonych na ich realizację. Tak więc określenia „2 lata, 3 lata” jedynie oznaczają, że treści nauczania są realizowane w 2 lub 3 klasach, jednakże niekoniecznie przez cały rok szkolny.

W takim układzie matrycowym trudno jednak ocenić całościowo spójność edukacji matematycznej w klasach 4-8 w szkole podstawowej. Natomiast przedstawienie tych zagadnień w ujęciu działowym daje właściwy obraz, jak długo uczniowie obcuja z problemami danego działu, jak te zagadnienia są kontynuowane. Tak jak widzimy to na kolejnym rysunku.

Rysunek 1. Matematyczna przestrzeń edukacyjna w ujęciu 2-wymiarowym – realizacja treści nauczania wg poziomu klasowego w 8-letniej szkole podstawowej.



Legenda: Dz. – działania na liczbach; G.pł. – geometria na płaszczyźnie; G.prz. – geometria przestrzenna; Zb.dan. – zbieranie, interpretacja danych, statystyka i rachunek prawdopodobieństwa; Ukl.wsp. – interpretacja liczb na osi liczbowej, prezentacja zagadnień w kratowym układzie współrzędnych; Alg. – wyrażenia algebraiczne, równania; Inne – cyfry rzymskie, skala, czytanie map, odbicia, symetrie

Prawie wszystkie działy programowe są realizowane w cyklu kształcenia na poziomie każdej klasy 4-8. Tak więc jest możliwość analizowania i rozwiązywania na lekcjach zadań „mieszanych”, gdzie można wykorzystać zagadnienia i metody z różnych działów czy obszarów. Warto pamiętać o usługowej roli obszaru „Działania na liczbach” w odniesieniu do pozostałych działów, jak też o wzajemnie zazębiających się obszarach dotyczących zagadnień geometrii płaskiej i przestrzennej.

Każdy z obszarów wiedzy matematycznej można analizować na każdym poziomie wymagań ogólnych, wymienionych w podstawie programowej dla obu etapów edukacji matematycznej, pod kątem stopnia złożoności czynności – od tych prostych, poprzez naśladowanie i algorytmiczne odwzorowania, aż do bardziej złożonych, wymagających zastosowania wielu operacji myślowych. **Próba zestawienia tych wymagań z taksonomią ABC Bolesława Niemierki** może dać ciekawe wyniki porównawcze.

Tabela 3. Zestawienie wymagań ogólnych (celów kształcenia) z matematyki w szkole podstawowej z taksonomią celów poznawczych ABC

Wymagania ogólne (Podstawa Programowa)	Taksonomia celów ABC
<p>I. Sprawności rachunkowa.</p> <p>1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.</p> <p>2. Weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników oraz ocena sensowności rozwiązania.</p>	<p>(A) Zapamiętanie wiadomości – przypomnienie sobie pewnych terminów, faktów, praw i teorii naukowych, zasad działania; bez mylenia ich i zniekształcania</p> <p>[rozpoznać, wymienić elementy, podać, określić, zdefiniować, zidentyfikować, wyliczyć].</p>
<p>II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</p> <p>1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.</p> <p>2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.</p> <p>3. Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.</p>	<p>(B) Zrozumienie wiadomości – umiejętność przedstawienia wiadomości w innej formie, uporządkowania, streszczenia i omówienia [wyjaśnić, scharakteryzować, streścić, rozróżnić, uzasadnić, zilustrować].</p>

<p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.</p> <p>2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.</p>	<p>(C) Stosowanie wiadomości w sytuacjach typowych – praktyczne posługiwanie się wiadomościami wg podanych uprzednio wzorów [wykonać, rozwiązać, zastosować, skonstruować, porównać, określić, narysować, sklasyfikować, zmierzyć, połączyć, zaprojektować, wybrać sposób, wykreślić].</p>
<p>IV. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.</p> <p>2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.</p> <p>3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.</p>	<p>(D) Stosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych – umiejętność formułowania i rozwiązywania problemów, dokonywania analizy i syntezy nowych dla niego zjawisk, formułowania planu działania, tworzenia oryginalnych przedmiotów, wartościowania według pewnych kryteriów</p> <p>[udowodnić, przewidzieć, wykryć, zanalizować, ocenić, zaplanować, zaproponować, opracować].</p>

Zestawienie takie nie zawsze można w sposób jednoznaczny odnieść do części treści nauczania, jednakże pozwala na analizę struktury wymagań ogólnych podstawy programowej w odniesieniu do poszczególnych obszarów wiadomości i umiejętności. Zwłaszcza określenia czynności dla poszczególnych kategorii taksonomicznych ABC bardziej przybliżają i objaśniają filozofię i ideę twórców podstawy.

Rola edukacji matematycznej w innych przedmiotach

Relacje edukacji matematycznej z edukacją przyrodniczą (zwłaszcza na etapie kształcenia w starszych klasach szkoły podstawowej) są niezwykle istotne – zarówno gdy traktujemy matematykę jako instrumentarium do badania zjawisk przyrodniczych, ale też w kształtowaniu twórczego i strategicznego myślenia.

Jak to się ma w edukacji matematyczno-przyrodniczej w szkole podstawowej, ilustruje tabela poniżej.

Tabela 4. Elementy matematyki na lekcjach przedmiotów przyrodniczych w SP⁶

Sprawność rachunkowa.	Działania na liczbach naturalnych i ułamkowych; zaokrąglanie liczb; wykorzystanie działań na ułamkach w obliczeniach na jednostkach mianowanych.
wielkości duże i małe	Zapis liczb w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdy $1 \leq a < 10$, k jest liczbą całkowitą; odczytywanie, interpretowanie i porównywanie dużych i małych wielkości.
tabele, diagramy, wykresy	Odczytywanie i interpretowanie, tworzenie diagramów, wykresów (w tym w prostokątnym kratowym układzie współrzędnych).
jednostki miary	Wykorzystanie do obliczeń długości, powierzchni, objętości, pojemności (np. cylindra – wyprzedzanie programu SP).
miary czasu, częstotliwość	Wykorzystanie do obliczeń masy (ciężaru) i gęstości, obliczeń pieniężnych.
wielkości proporcjonalne	Skala, powiększanie i pomniejszanie; skala mapy, obliczenia.
wzory, równanie	Przekształcanie wzorów literowych; wykorzystanie pojęcia „równość stronami” w uzupełnianiu równań chemicznych.

Tak się też zdarza – przy analizie wymagań szczegółowych (treści nauczania) w podstawie programowej – że na lekcjach biologii, chemii, fizyki lub geografii wyprzedzamy treści nauczania z matematyki lub nawet wykraczamy poza obowiązujące w podstawie programowej. Przykładem może być realizacja zagadnień, związanych z wyżej wspomnianą funkcją – np. wykresy liniowe w układzie współrzędnych.

Tabela 5. „Ukryte funkcje” na lekcjach przedmiotów przyrodniczych w SP – przykłady ⁷

Fizyka	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ruch jednostajny prostoliniowy (droga, prędkość, czas) – wykres i jego interpretacja. ▪ Ruch jednostajnie przyspieszony vs. opóźniony (droga, prędkość, przyspieszenie vs. opóźnienie, czas) – wykres i jego interpretacja. ▪ Ruch jednostajnie zmienny – wykres i jego interpretacja, zmiany w przedziałach czasowych.
Chemia	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Rozpuszczalność substancji (krzywa rozpuszczalności). ▪ Przeliczanie stężeń, masy substancji (odwołania do wielkości proporcjonalnych).
Geografia	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Skala mapy – przeliczanie (intuicyjne wykorzystanie zależności proporcjonalnych). ▪ Diagramy słupkowe, wykresy (struktura społeczeństwa wg wieku i płci, procent bezrobocia, ludność miast, ludność krajów).

Jeśli więc uczeń potrafi odczytywać, analizować i interpretować wykresy, może nawet stosuje określenia dot. zmienności funkcji (podobnie jak przy analizie diagramów słupkowych na lekcjach matematyki), to jednak nie ma podstawowej wiedzy o funkcji.

Edukacja matematyczna „na wyrost”

(1) Problem – forma prezentacji

Jak przedstawić uczniowi problem matematyczny (przykład, zadanie) w formie bardziej bliskiej, przyjaznej i zrozumiałej dla niego? Różnego rodzaju metody, chwytów czy tricków są znane wielu nauczycielom. Już na etapie edukacji wczesnoszkolnej, choćby przy działaniach na przekraczanie progu dziesiętkowego czy przy dodawaniu/odejmowaniu pamięciowym liczb dwucyfrowych, uczeń dokonuje dzielenia liczby na dwa składniki, na których wykonuje odpowiednie działania. Zadania tekstowe ilustrowane są graficznie lub na konkretnych elementach, z którymi uczeń może wykonywać odpowiednie operacje. W zadaniach tekstowych może wystąpić nadmiar informacji albo brak jednej. Przy nadmiarze informacji uczeń wybiera te, które prowadzą do rozwiązania problemu, natomiast przy niedoborze informacji uczeń może wybrać kilka wariantów rozwiązań lub poprosić o dodatkową informację.

Ilustracja graficzna problemu matematycznego, jaką dla siebie wykona uczeń, pozwala mu na „ogarnięcie” zagadnienia, ale też może być informacją dla nauczyciela, jak uczeń rozumie treść zadania, czy potrafi dostrzec pewne związki. Samo rozwiązanie zadania może mieć też postać graficzną. Na lekcjach matematyki i przedmiotów przyrodniczych w szkole podstawowej ilustracja graficzna ułatwia zapamiętanie choćby pewnych własności figur geometrycznych, pozwala także np. zilustrować problem w układzie współrzędnych i odczytać informacje. W wielu zadaniach jest ona niezbędna, np. przy rozwiązywaniu zadań przy mieszaniu roztworów czy stopów metali.

(2) Stopniowanie wymagań – poziomy osiągnięć ucznia

Zestawienie wymagań ogólnych i taksonomii ABC może stanowić punkt wyjścia do analizy złożoności poszczególnych treści nauczania i tworzenia poziomów wymagań.

Taką analizę poszczególnych treści nauczania można przeprowadzić w odniesieniu do coraz bardziej złożonych wymagań ogólnych (matematycznych umiejętności kluczowych) – z uwzględnieniem taksonomii celów. W wielu przypadkach jest to metoda spójna z określeniem poziomu osiągnięć ucznia. Wydawnictwa w swoich materiałach uzupełniających do podręczników podają taką analizę w postaci planów wynikowych.

Poniżej dwa przykłady ujęcia wybranych obszarów wiadomości i umiejętności w kategoriach taksonomicznych (podstawa programowa dla szkoły podstawowej – 2017).

Tabela 6a. Przyporządkowanie treści nauczania z matematyki w SP wg kategorii taksonomicznych

Taksonomia ABC [B.Niemierko]	OBSZAR WIADOMOŚCI I UMIEJĘTNOŚCI: <i>Liczby, działania na liczbach</i>
(A) Zapamiętanie wiadomości.	Rozpoznawanie, odczytywanie, zapisywanie liczb.
(B) Zrozumienie wiadomości	Interpretacja liczb, przedstawianie na osi liczbowej, porównywanie liczb, szacowanie liczb, porównywanie różnicowe i ilorazowe; wielokrotności liczb; prawa liczb (przemienności, rozdzielności).
(C) Stosowanie wiadomości w sytuacjach typowych.	Obliczenia pamięciowe i pisemne na liczbach; wykorzystanie praw liczb do ułatwienia obliczeń pamięciowych; własności liczb, cechy podzielności liczb, NWW i NWD; kolejność działań.
(D) Stosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych [Analiza, Synteza, Krytyczna ocena].	Rozwiązywanie zadań tekstowych z wykorzystaniem działań na liczbach.

Tabela 6b. Przyporządkowanie treści nauczania z matematyki w SP wg kategorii taksonomicznych

Taksonomia ABC [B.Niemierko]	OBSZAR WIADOMOŚCI I UMIEJĘTNOŚCI: <i>Figury na płaszczyźnie</i>
(A) Zapamiętanie wiadomości	Rozpoznawanie, kreślenie figur
(B) Zrozumienie wiadomości	Własności figur, klasyfikowanie wg cech i własności; elementy figur (wysokości, przekątne, kąty); przystawanie figur; obwody figur
(C) Stosowanie wiadomości w sytuacjach typowych	Pojęcie pola figury, obliczanie pól figur; twierdzenie Pitagorasa i zastosowanie;
(D) Stosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych [Analiza, Synteza, Krytyczna ocena]	Wykorzystanie w rozwiązywaniu zadań, w dowodzeniu własności figur; obwody i pola figur w kratowym układzie współrzędnych

Nie nauczamy wszystkiego i wszystkich jednakowo – stopniujemy wymagania. Jednak stopniowanie wymagań w zakresie nauczanych treści nie powinno zniechęcać ucznia, bardziej ma zachęcać i motywować go, aby chciał wiedzieć/umieć więcej.

(3) Poszerzanie treści nauczania; wyprzedzanie poza podstawę programową – zadania inaczej (na przykładzie SP)

- Warto budować tzw. **zadania „mieszane”**, do których uczeń musi wykorzystać wiadomości i umiejętności z różnych działów, albo musi np. sięgnąć po dodatkową informację do internetu lub do pakietu przygotowanego przez nauczyciela. Zadania „mieszane” mogą być wieloetapowe – żeby przejść do kolejnego etapu (podpunktu) zadania, należy wcześniej coś rozwiązać, przeanalizować.
- Dowodzenie inaczej** – czyli zadania, które zawierają polecenie „*udowodnij, że..., sprawdź, czy..., wykaż, że..., skorzystaj z dodatkowej informacji w załączniku do zadania, aby sprawdzić, czy...*”. Klasyczne zadania na dowodzenie można uzupełnić zadaniami w innej formie. Doskonale nadają się do tego zadania, które już mają rozwiązanie końcowe. Np. podana jest objętość bryły o określonych parametrach, między którymi zachodzi pewna zależność, a uczeń przeprowadzając analizę i obliczenia musi tę zależność jakby potwierdzić. Albo zadania, w których dana jest figura płaska lub przestrzenna, którą rozcinamy czy przycinamy. Uczeń ma wtedy określić np. stosunek pól lub objętości figury i części pozostałej po odcięciu – bez obliczeń, a z wykorzystaniem pewnych własności.
- W podstawie programowej dla SP (2017) możemy wyczytać, że uczeń powinien umieć zapisać w postaci wyrażenia algebraicznego np. informację zawartą w zadaniu tekstowym. A więc może to być wyrażenie z 2 lub 3 zmiennymi. Może warto tak ułożyć zadanie, z podaniem dodatkowych warunków, aby uczeń mógł rozwiązać równanie z 2 lub 3 zmiennymi? Może warto dać uczniowi do rozwiązania np. równanie $x \cdot y = 26$ albo $(x + 2) \cdot y = 19$, którego rozwiązaniem są liczbami całkowitymi dodatnimi? Albo zadanie, które ma kilka rozwiązań? Przy czym zmienne mogą być zapisane innymi symbolami lub rysunkami, czyli w sposób łatwiejszy do zapamiętania przez ucznia.
- W podstawie programowej SP **uczeń ma do czynienia z kratowym układem współrzędnych**. Może spróbować wykorzystać go na lekcjach matematyki do ilustracji zagadnień typu „prędkość – droga – czas”. Albo np. diagramy słupkowe przedstawić w kratowym układzie współrzędnych jako wykres liniowy łamany. W kratowym układzie współrzędnych możemy też w formie wykresu przedstawiać wielkości wprost proporcjonalnych, a to może wyprzedzać kreślenie funkcji liniowej.
- W podstawie programowej SP zaznaczono, że niektóre działy można zrealizować po egzaminie, np. „Długość okręgu i pole koła” (realizacja w klasach 7-8). Można go jednak połączyć z działem „Wielokąty, koła i okręgi” (np. w klasie 6), praktycznie wyznaczając z uczniami liczbę π , a następnie podając jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3,14 \approx \frac{22}{7}$.
- Można **walec i stożek** potraktować w **edukacji matematycznej w SP** jako szczególne przypadki graniastoslupa prawidłowego i ostrosłupa prawidłowego. Znając już wartość liczby π , można obliczać ich objętość i powierzchnie, choć nie ma tego w treściach nauczania podstawy programowej SP (tu należałoby podać bez udowadniania gotowy wzór na pole powierzchni bocznej walca i stożka).

Takich przykładów i pomysłów można by mnożyć.

Zachęcam do zapoznania się z artykułem pt. „*Continuum czyli ciągłość edukacji matematycznej w szkole ponadpodstawowej (cz.2)*”, w kolejnym numerze „Informatora Oświatowego”.

1. Rozporządzenie MEN z dnia 14.02.2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, Dz.U.

- 2017 poz. 356; Rozporządzenie MEN z dnia 30.01.2018 r. *sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia*, Dz.U. 2018 poz.467
2. Rozporządzenie MEiN z dnia 16.12.2020 r. *zmieniające rozporządzenie w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19* (Dz.U. 2020 poz. 2314); patrz także – strony CKE i OKE
3. O nauczaniu matematyki w przedszkolu i w edukacji wczesnoszkolnej, o niepowodzeniach i próbach zaradzenia im pisała prof. dr hab. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska w licznych swoich publikacjach – m.in. w jednej z pierwszych publikacji *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych. Diagnoza i terapia*. Wydawnictwo UŚ Katowice 1985 (Prace Naukowe UŚ, nr 553). Zagadnieniom związanym z nauczaniem matematyki w edukacji przedszkolnej i w młodszym wieku szkolnym wiele publikacji poświęciła również prof. dr hab. Danuta Klus-Stańska.
4. ORE w Warszawie wydał cykl książek Małgorzaty Skury i Michała Lisickiego dot. edukacji wczesnoszkolnej – *Przed progiem. Jakie umiejętności są potrzebne do rozpoczęcia nauki w pierwszej klasie i jak je rozwijać?*, *Na progu. Ile w dziecku ucznia, a w nauczycieli mistrza? O co chodzi w pierwszej klasie?*, *Za progiem. Jak rozwija się dziecko i jaka jest rola nauczyciela w tym rozwoju?*, *Za progiem. Jak rozwija się dziecko i co z tego wynika dla nauczyciela klasy IV?*
5. Więcej – patrz: Paczkowski Jerzy, *Matematyka bez funkcji w nowej podstawówce*, „Informator Oświatowy” ODN w Słupsku, nr 3/2018
6. O kształceniu kompetencji matematyczno-przyrodniczych i wykorzystaniu umiejętności matematycznych na zajęciach lekcyjnych przedmiotów ścisłych – patrz: Paczkowski Jerzy, *Rozwijanie kompetencji matematycznych uczniów*, Informator Oświatowy ODN Słupsk, nr 1/2020; Kreft Anna, *Matematyka w biologii*, „Informator Oświatowy” ODN Słupsk, nr 1/2020; Garszczyński Franciszek, *Ile matematyki jest w fizyce?*, Informator Oświatowy ODN w Słupsku, nr 4/2018
7. Więcej – patrz: Paczkowski Jerzy, *Matematyka bez funkcji....*, jw.

Jerzy Paczkowski

Ekspert Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* w zakresie matematyki. Nauczyciel dyplomowany, doradca metodyczny z matematyki, a następnie konsultant ODN ds. diagnozy i edukacji matematycznej w latach 1993-2018. Nauczyciel matematyki w szkole podstawowej i w szkole średniej. Egzaminator egzaminów maturalnych z matematyki. Członek Polskiego Towarzystwa Diagnostyki Edukacyjnej.

7 minilekcji obywatelskich

PRZEWODNIK OBYWATELSKI



WIEDZA O SPOŁECZEŃSTWIE
W LICEUM I TECHNIKUM
– ZAKRES PODSTAWOWY

7 MINILEKCJI OBYWATELSKICH



Centrum Edukacji Obywatelskiej przygotowało 7 minilekcji obywatelskich, czyli siedem krótkich prezentacji multimedialnych. Slajdy można wyświetlać na YouTube lub prezentować jak plansze na ekranie komputera za pomocą programu Adobe Acrobat Reader. Minilekcje zostały tak pomyślane, aby wesprzeć nauczycieli w pracy na lekcji wiedzy o społeczeństwie w liceum ogólnokształcącym i technikum. Tematy minilekcji: „W świecie politycznych idei”, „Wybieramy naszych przedstawicieli”, „Jak działa polski sejm”, „Po co nam głowa państwa?”, „Trudna sztuka rządzenia”, „Rządzmy się sami!”, „Młodzi ludzie wobec prawa. Jak

o tym uczyć?”. Wszystkie minilekcje opracowane zostały do działu *Państwo*. Na przeprowadzenie minilekcji obywatelskiej nie potrzeba 45 minut. Sposób wykorzystania zaproponowanego materiału zależy oczywiście od nauczyciela. Pozwoli to nie tylko na wizualizację procesu dydaktycznego i uatrakcyjnienie lekcji WOS-u, ale pomoże też w aktywizowaniu uczniów i rozbudzaniu zainteresowań przedmiotem. (Ze strony: <https://koss.ceo.org.pl/wos-do-liceum/7-minilekcji-obywatelskich>)

