Jerzy Paczkowski

Matematyka – jak wygrać z Królową Nauk?

Siódma edycja Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza"* organizowana przez Pomorski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Słupsku za nami. Kończy się projekt, a z nim wieloletnie spotkania z uczniami, którzy wykazywali się sporą wiedzą matematyczną i chęcią pokonywania barier, jakie stwarzały wcale nie tak łatwe zadania.

Wczytując się w rozwiązania zadań, jak i w uczniowskie propozycje zadań własnych, można było w ciągu tych 7 lat obserwować rozwój myślenia matematycznego uczniów – zwłaszcza tych, którzy wielokrotnie brali udział w konkursie. „Spotkania z matematyką" były dla nich kolejnym etapem weryfikacji swoich umiejętności matematycznych, kolejną przygodą. Wszyscy uczestnicy konkursu matematycznego mogli wykazać się nie tylko znajomością teorii i biegłością matematyczną, ale również intuicją i praktycznym podejściem do zadań. Dało się to zauważyć w tegorocznej edycji PLZ już na etapie kwalifikacyjnym, gdy do dalszego etapu zakwalifikowała się duża liczba uczniów, aby w kolejnych etapach pokonać innych.

Tabela 1. Uczestnicy konkursu PLZ 2022/2023 z matematyki

	Etap szkolny	Etapu powiatowy*)	Etapu wojewódzki*)	Etap wojewódzki Nadesłane zadanie własne
Szkoły podstawowe	2143	102 (na 147)	47 (na 49)	43
Szkoły ponadpodstawowe	1288	66 (na 96)	46 (na 49)	32

*) zapis 102 (na 147) informuje, że do etapu powiatowego zakwalifikowano 147 uczniów, a zadania rozwiązywało na tym etapie 102 uczniów; podobne znaczenie w pozostałych zapisach.

Jak widać z tabeli, prawie 70% uczniów zakwalifikowanych do etapu powiatowego, nadesłało rozwiązania zadań, zamieszczonych na stronie internetowej. Na etapie powiatowym uczniowie nie byli ograniczeni czasem. Mogli kilkanaście dni poświęcić na rozwiązywanie przedstawionych zadań, mając dostęp do potrzebnych informacji z dziedziny matematycznej (w podręcznikach, w tablicach, w internecie). Przy czym w nadesłanych pracach niekoniecznie przedstawiano rozwiązania wszystkich zadań.

Z kolei prawie wszyscy uczniowie, zakwalifikowani do etapu wojewódzkiego, przystąpili do tego etapu. Natomiast znacząca grupa uczniów chciała zwiększyć swoje szanse i podwyższyć punktacje końcową etapu wojewódzkiego, nadsyłając propozycje zadań własnych z przykładowymi rozwiązaniami.

Przystępując do analizy wyników tegorocznej edycji konkursu, warto podkreślić, że na etapie powiatowym i wojewódzkim większość zadań była dwuczęściowa. Obie części (podpunkty a i b) albo stanowiły dwa odrębne zadania, bazujące na tej samej treści, albo też po rozwiązaniu zadania z podpunktu a, należało uzyskane informacje wykorzystać do rozwiązania podpunktu b zadania. Z założenia część pierwsza takiego zadania była łatwiejsza. Czyli dawała szansę rozwiązania choć części zadania.

Etap szkolny a zadania „praktyczne" i „szkolne"

Na etapie szkolnym w zestawie dla szkół podstawowych pojawiły się 3 zadania o charakterze praktycznym, których treść powinna być bliska uczniom – (1) wycieczka klasowa i jej koszty, (2) zakup gwoździ i wkrętów w ilościach określonych odpowiednimi stosunkami, (3) kostka sześcienna o objętości 125, z której z każdego naroża wyjęto kostki jednostkowe.

W pierwszym zadaniu uczniowie mogli źle zrozumieć treść zadania – potraktować całkowitą wpłatę 92 złotych od 1 ucznia jako DOPŁATĘ. Ale całe rozumowanie prowadzące do obliczenia kosztów wycieczki klasowej byłoby podobne do modelowego. Dlatego należało ocenić wysoko, uwzględniając i akceptując w punktacji złą interpretację treści wynikające ze złego zrozumienia.

Na etapie szkolnym w zestawie dla szkół ponadpodstawowych 3 zadania były „szkolne" – (1) wykorzystanie własności logarytmu i rozwiązanie równania kwadratowego, (2) losowanie ponumerowanych kul z 2 pojemników, (4) ostrosłup, który przecięto płaszczyzną na dwie części.

Natomiast w zadaniu dla szkół ponadpodstawowych o podzielności pewnego wyrażenia przez 64, gdy występujące w nim zmienne należały do zbioru liczb naturalnych, w schemacie oceniania podano częściowe modelowe rozwiązania. Uczniowie mieli pokazać strategię rozumowania, uwzględniając 3 przypadki wartości zmiennych (parzyste, nieparzyste). Niekoniecznie uwzględniając wszystkie przypadki i wyczerpując pełne rozwiązania. Za to mogli uzyskać maksymalną liczbę punktów.

Zadania na etapie powiatowym

Nadesłane rozwiązania zadań na etap powiatowy można już analizować zarówno pod kątem stopnia trudności, oryginalnych rozwiązań czy też popełnianych błędów w rozumowaniu.

Poniższa tabela pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 2. Dane dotyczące uczniów klasy 7 i 8 szkoły podstawowej oraz uczniów szkół ponadpodstawowych [PLZ 2022/2023 – etap powiatowy]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
Szkoła Podstawowa (klasy 7 i 8) Piszących na etapie powiatowym – 102 uczniów	99*) 0,92**) 0,95***)	92*) 0,77**) 0,85***)	99*) 0,59**) 0,61***)	87*) 0,56**) 0,65***)	87*) 0,32**) 0,38***)
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Piszących na etapie powiatowym – 66 uczniów	66*) 0,80**) 0,80***)	57*) 0,71**) 0,83***)	57*) 0,64**) 0,74***)	57*) 0,71**) 0,82***)	55*) 0,61**) 0,73***)

*) – liczba uczniów, którzy podjęli się rozwiązywania tego zadania
**) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących
***) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiazywania tego zadania

Na podstawie liczby poprawnych rozwiązań można stwierdzić, że zadania nie sprawiły uczniom większych trudności. Ogólny poziom przedstawionych rozwiązań zadań był wysoki (średnia dla SP – 63 %, dla szkół ponadpodstawowych – 69 %).

Na etapie powiatowym dla uczniów szkół podstawowych trudnym okazało się zadanie 5. W zadaniu tym należało obliczyć pole powierzchni kolejnych kostek Mengera (czyli takich „dziurawych" sześcianów) – wskaźnik łatwości 0,38, gdy zadanie podjęło 87 uczniów. Wyjściową bryłą był pełny sześcian o krawędzi *a*, składający się z 27 „jednostkowych" kostek sześciennych, z którego wybierano kostki o krawędzi 1/3 *a*, potem 1/9 *a* i wreszcie 1/27 *a*. W ten sposób kolejny sześcian był coraz bardziej „dziurawy". I tu okazało się, jak operatywni mogą być uczniowie. Wielu z nich sięgnęło do gotowego wzoru na pole powierzchni kostki Mengera (do pobrania z angielskiej wersji Wikipedii).

Tak więc w przypadku zadania 5 dla szkół podstawowych o „dziurawej" kostce sześciennej pojawił się jakże istotny problem: „*Jak ocenić uczniowskie rozwiązania zadania 5*?" Czy premiować operatywność kilkunastu uczniów i gotowe wzory, do których wystarczyło podstawić odpowiednie dane? Czy też żmudne wieloetapowe analizy uczniów, którzy także chcieli obliczyć powierzchnię kostki Mengera, i którzy „uruchomili" swoją wyobraźnię przestrzenną? Odpowiedź mogła być jedna – przede wszystkim należało zweryfikować modelową punktację i przyjąć taką, która zrównywałaby oba typy rozwiązań do pewnego poziomu. Czyli za podanie gotowego wzoru i przeprowadzenie obliczeń lub wyliczenie „na piechotę" powierzchni kolejnej kostki uczeń mógł uzyskać 6 punktów na 10 możliwych.

Natomiast zadania etapu powiatowego dla uczniów szkół ponadpodstawowych nie sprawiły im wielu problemów.

Wśród zadań **dla szkół ponadpodstawowych było zadanie 3 bardziej o charakterze praktycznym** – dany był skwer w kształcie kwadratu, do obsadzenia begoniami i bratkami oraz obsiania trawą. Części skweru wydzielono, kreśląc z każdego wierzchołka skweru łuki, równe długości boku kwadratu, dzieląc w tej sposób skwer na 9 różnych części. Należało obliczyć, jaką powierzchnię będą miały poszczególne części skweru. Większość uczniów ponumerowała te części – jedna część centralna, 4 części przylegające do niej i 4 części „zewnętrzne". Następnie przeprowadzono analizę, budując układ równań, którego zmiennymi były części ponumerowane. Niewiele było natomiast rozwiązań klasycznych, wykorzystujących np. funkcje trygonometryczne, podobieństwo, twierdzenie Pitagorasa.

W końcowych obliczeniach tego zadania należało uwzględnić podane w zadaniu przybliżenia: $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ i $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. A to już w wielu pracach uczniów prowadziło do błędów rachunkowych w działaniach na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.

Zadania na etapie wojewódzkim

W tegorocznej edycji Pomorskiej Ligi Zadaniowej na etapie wojewódzkim pojawiły się 2 zadania weryfikujące strategię myślenia uczniów na etapie powiatowym. Nawiązywały one do zadania o kostce Mengera (szkoła podstawowa) i zadania praktycznego ze skwerem (szkoła ponadpodstawowa) – były to odpowiednio zadanie 4 SP i zadanie 3 PP.

Wskaźniki łatwości dla tych zadań mogą być zaskakujące.

Poniższa tabela pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 3. Dane dotyczące uczniów klasy 7 i 8 szkoły podstawowej oraz uczniów szkół ponadpodstawowych [PLZ 2022/2023 – etap wojewódzki]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
Szkoła Podstawowa (klasy 7 i 8) Piszących na etapie wojewódzkim – 47 uczniów	47*) 0,58**) 0,58***)	44*) 0,39**) 0,42***)	47*) 0,47**) 0,47***)	43*) 0,33**) 0,36***)	40*) 0,17**) 0,20***)
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Piszących na etapie wojewódzkim – 46	45*) 0,28**) 0,28***)	45*) 0,49**) 0,50***)	42*) 0,45**) 0,50***)	41*) 0,29**) 0,33***)	31*) 0,04**) 0,05***)

*) – liczba uczniów, którzy podjęli się rozwiązywania tego zadania
**) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących
***) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiazywania tego zadania

W zadaniu 4 dla szkół podstawowych na etapie wojewódzkim znów chodziło o kostkę Mengera, do której doczepiono w narożach każdej ściany kostkę o krawędzi 3 razy mniejszej. Na niższy wynik miało wpływ złe zrozumienie treści zadania. Wielu uczniów było przekonanych, że z naroży kostki Mengera wyjęto sześcianik, a w to miejsce wstawiono kostkę o krawędzi 3 razy mniejszej. Jeżeli powierzchnie większej i mniejszej kostki były poprawnie obliczone, to tę błędną interpretację treści zadania należało uwzględnić jako pozytywny element rozwiązania.

Jeśli porównamy wskaźniki wszystkich zadań z etapu wojewódzkiego dla szkół ponadpodstawowych, to właśnie **zdanie 3 dla szkół ponadpodstawowych** miało najlepszy wskaźnik łatwości. Można przypuszczać, że właśnie „trening” nad podobnym zadaniem z etapu powiatowego przyczynił się do tego, że to zadanie 3 miało najlepszy wynik.

Absolutnym zaskoczeniem były rozwiązania **zadania 1 dla szkół ponadpodstawowych**, które w modelowym schemacie rozwiązania uznane było jako najłatwiejsze. W zadaniu tym należało obliczyć prawdopodobieństwo, że na zegarze w postaci □□ **:** □□ w formacie 24-godzinnym na ekranie telefonu komórkowego pokazywany będzie czas, w którym wystąpią różne cyfry. Jednym z błędów było niezauważenie, że w formacie tym nie ma godziny 24:00 czyli że nie ma tez godziny 24:01 itd., a minutę przed północą mamy godzinę 23:59, po której już jest godzina 0:00, jak też niezauważenie, że żadna z pełnych godzin nie jest np. w postaci 14:60. W poprawnych rozwiązaniach przedstawiono 2 metody – zmiany oczekiwanego czasu względem np. pełnych godzin lub względem dziesiątków godzin (0,1,2).

Z kolei **zadanie 5 dla szkół ponadpodstawowych** o dwóch kulach, na których opisano stożek, a potem poprowadzono przekroje stożka dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy, pokazało po raz kolejny, że uczniowie posiadają słabą wyobraźnię przestrzenną i nie potrafią zobrazować graficznie problemu.

Podsumowanie

Niestety, etap wojewódzki (powiatowy również) w sposób wręcz „namacalnie dosadny” unaocznił, jak zawiodła intuicja i praktyczne spojrzenie na dany problem, jak też, że uczniowie mają problemy z postrzeganiem przestrzennym i przedstawieniem w postaci graficznej zagadnień z geometrii przestrzennej .

Analizując zaprezentowane przez uczniów rozwiązania zadań – nie tylko z ostatniego konkursu, ale również z poprzednich w 7-letnim cyklu PLZ – można zauważyć, jak mocno szkolna wiedza matematyczna „przytłoczyła” myślenie intuicyjne i praktyczne podejście do problemów. Może to wina przeładowanego programu matematyki w klasach 4-8 szkoły podstawowej i w szkołach ponadpodstawowych. A może pewne braki we wczesnoszkolnej edukacji matematycznej.

Gratuluję wszystkim uczestnikom tegorocznych zmagań matematycznych na wszystkich etapach Pomorskiej Ligi Zadaniowej. Dziękuję za podjęcie próby zmierzenia się z problemami matematycznymi. W szczególności dziękuję za arcyciekawe i pomysłowe zadania własne.

Gratuluję nauczycielom-opiekunom, którzy mobilizowali uczniów i wspierali swych podopiecznych w ich rozwoju, służąc im radą, wskazówkami i pomocą.

PLZ 2022/2023: Matematyka – jak wygrać z Królową Nauk?

Czyli o niektórych zadaniach…

Nie sposób omówić wszystkie zadania z tegorocznej edycji Pomorskiej Ligi Zadaniowej.

Przede wszystkim omówione zostaną zadania, dla których rozwiązania potrzebna jest krytyczna analiza informacji, zawartych w zadaniu, umiejętność graficznego przedstawienia problemu – zarówno w zadaniach łatwych, jak i tych trudniejszych.

Zadanie 1 [SP etap szkolny]

W klasie VI a, liczącej 26 uczniów, zaplanowano wycieczkę krajoznawczą do Słowińskiego Parku Narodowego. Każdy z uczniów miał do opłacenia 1/3 kosztów wycieczki. Tydzień przed wyjazdem okazało się, że koszty wycieczki wzrosły o 15 % i w rezultacie każdy z uczniów musiał wpłacić 92 złote za udział w wycieczce. Jaki był początkowo całkowity koszt wycieczki klasowej i o ile złotych droższa była ostatecznie ta wycieczka?

Rozumowanie jest następujące:

- Skoro każdy uczeń miał do zapłacenia 1/3 kosztów wycieczki, a ostatecznie kwota ta wynosiła 92 złote, to znaczy, że w rezultacie koszt wycieczki wynosił 276 złotych na każdego ucznia.
- Skoro koszty wycieczki wzrosły o 15 %, to znaczy, ze 276 złotych to 115% pierwotnych kosztów wycieczki. Wyliczając z proporcji, otrzymujemy, ze pierwotny koszt wycieczki wynosił 240 złotych na każdego ucznia.
- Czyli ostateczny koszt wycieczki klasowej wynosił: 276 x 26 = 7176 złotych. A początkowo planowany koszt wycieczki wynosił: 240 x 26 = 6240 złotych.
- Tak więc ostatecznie klasowa wycieczka była droższa o: 7176 – 6240 = 936 złotych.

Zadanie 1 [PP etap szkolny]

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_2\left[1 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)\right]$.

Zadanie jest typowo „szkolne", w którym trzeba wykorzystać własności logarytmu, rozpatrując własność dotycząca wyrażenia logarytmowanego (w tym przypadku wyrażenia wewnątrz nawiasu zwykłego, a następnie kwadratowego):

$$D = \left\{x\epsilon R\colon (x^2 - 5x + 6) > 0 \ i \ \left[1 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)\right] > 0\right\}$$

Wiadomo, że skoro ułamkowa podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, to funkcja jest malejąca i tę własność należało będzie wykorzystać przy rozwiązywaniu drugiej nierówności.

$$\begin{cases}(x^2 - 5x + 6) > 0\\ \left[1 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)\right] > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\epsilon(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > \log_{\frac{1}{2}} 2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x\epsilon(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\\ x\epsilon(1,4)\end{cases} \Rightarrow \boxed{x \in (1,2) \cup (3,4)}$$

Tak więc dziedziną funkcji jest zbiór

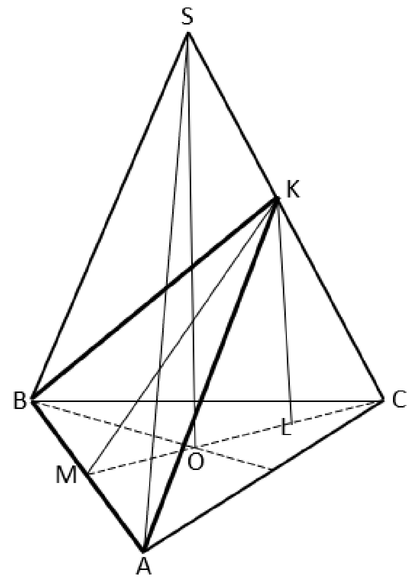
$$D = \{x \in R\colon (1,2) \cup (3,4)\}$$

Zadanie 4 [PP etap szkolny]

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość a i krawędź boczna jest od niej trzy razy dłuższa. Narysuj ten ostrosłup oraz zaznacz na nim przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej.

a) Oblicz pole tego przekroju.
b) Wykaż, że obie części ostrosłupa, powstałe z przecięcia płaszczyzną przekroju, mają jednakową objętość.

Dla właściwego rozwiązania zadania należy problem przedstawić w formie graficznej.



Dane:

$|AB| = |BC| = |CA| = a$

$|AS| = |BS| = |CS| = 3a$

$|CK| = |KS| = \frac{3}{2}a$

Szukane:

$P_{ABK} = ?$

$V_{ABCK} = ?$

$V_{ABKS} = ?$

Celem zadania było obliczenie pola przekroju, ale także wykazanie, że płaszczyzna przekroju dzieli ostrosłup na 2 części o równych objętościach. Czyli w tym ostatnim przypadku chodziło o przeprowadzenie takiego mniej sformalizowanego dowodu, wykorzystującego odpowiednie obliczenia.

Rozumowanie jest następujące:

- Pole przekroju czyli pole trójkąta ABK obliczymy z wzoru na pole trójkąta: $P_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |ME|$
- Wysokość MK jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego MLK, w którym:
- $|ML| = \frac{2}{3} \cdot |MC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ i $|KL| = \frac{1}{2}|SO| = \frac{a\sqrt{78}}{6}$, gdzie SO obliczamy z trójkąta prostokątnego SOC
- Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MLK otrzymujemy, że: $|MK| = \frac{a\sqrt{10}}{2}$
- Pole trójkąta ABK (przekroju) jest równe: $P_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |KM| = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$
- Mając wcześniej obliczoną wysokość ostrosłupa $|SO| = \frac{a\sqrt{78}}{3}$, możemy obliczyć objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ABCS, korzystając z wzoru: $V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot |OS| = \frac{a^3\sqrt{26}}{12}$
- Natomiast jak porównamy ostrosłupy ABCS i ABCK, zauważamy, że są to ostrosłupy o tej samej podstawie, a różnią się jedynie wysokościami: $|KL| = \frac{1}{2}|SO|$. Czyli objętość ostrosłupa ABCS jest dwa razy większa od objętości ostrosłupa ABCK. A stąd prosty wniosek, że płaszczyzna ABK dzieli ostrosłup ABCS na dwie części o jednakowych objętościach.

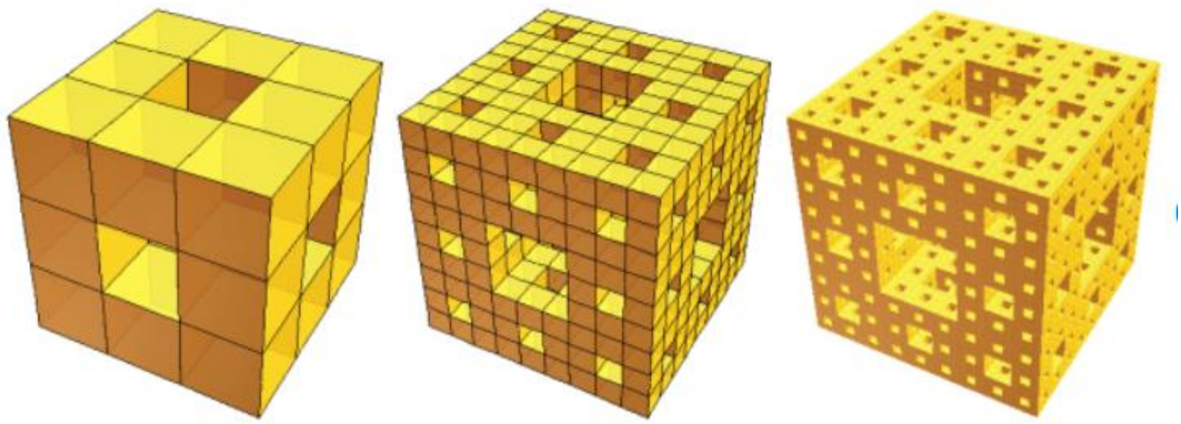
Zadanie 5 [SP etap powiatowy]

Kostka Mengera jest sześcianem.

Kostka Mengera powstaje w następujący sposób: Dany jest sześcian. Tniemy go na 27 sześcianów równej wielkości płaszczyznami równoległymi do jego ścian. Z każdej ściany usuwamy sześcian środkowy oraz taki sam sześcian, znajdujący się wewnątrz (w środku) bryły – jak widać na przykładzie pierwszej bryły na rysunku.

Rozpatrujemy teraz sześciany, które pozostały w bryle, i dla każdego z nich prowadzimy podobne rozumowanie czyli wycinamy odpowiednie sześcianiki. Możemy tak robić w nieskończoność. Na rysunku poniżej widać, jak kolejno zmienia się sześcian wyjściowy, gdy wycinamy mniejsze sześciany.

Nasz sześcian wyjściowy ma krawędź, której długość jest równa a. Oblicz, jaką powierzchnię ma druga bryła, widoczna na rysunku, a jaką powierzchnie ma trzecia bryła.



.

Źródło (kostka): Anton Vrdoljak, Kristina Miletić, Načela fraktalne geometrije i primjene u arhitekturi i građevinarstvu – https://www.researchgate.net/figure/Slika-4-Prve-tri-iteracije-Mengerove-spuzve-kocke-kojoj-je-obujam-0-a-oplosje-36_fig4_334397901; dostęp 24.11.2022 r.

Rozumowanie jest następujące:

Sześcian wyjściowy o krawędzi a – wtedy pole powierzchni $P_0 = 6a^2$.

Bryła pierwsza z rysunku:

- Sześcian wyjściowy dzielimy na 27 sześcianików o krawędzi $\frac{a}{3}$.
- Przeprowadzamy procedurę wyjmowania sześcianów o krawędzi równej $\frac{a}{3}$. Wtedy zostaje 20 sześcianów o krawędzi równiej $\frac{a}{3}$. W bryle wyjściowej mamy 6 otworów – z każdym wyjętym sześcianikiem „znikał" kwadrat o krawędzi równej $\frac{a}{3}$, ale w każdym z otworów na 6 ścianach pojawiały się 4 dodatkowe/widoczne ścianki kwadratowe o krawędzi równej $\frac{a}{3}$.
- Wtedy pole pierwszej „dziurawej" bryły (jak na rysunku powyżej) jest równe:
  $P_1 = 6a^2 - 6 \cdot 1 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 6a^2 + 18 \cdot \frac{a^2}{9} = 8a^2$
- Pierwsza „dziurawa" bryła składa się teraz z 20 sześcianików o krawędzi $\frac{a}{3}$.

Bryła druga z rysunku:

- Tym razem „wyjściowym" sześcianem jest pierwsza „dziurawa" bryła, która składa się z 20 sześcianików o krawędzi $\frac{a}{3}$. Przeprowadzamy podobne rozumowanie, jak dla bryły pierwszej, dla każdego z tych 20 sześcianików.
- Po powierzchni tej były wynosiło: $P_2 = 13\frac{1}{27} \cdot a^2$

Bryła trzecia z rysunku:

- Rozumowanie podobne do poprzednich prowadziło obliczenia powierzchni trzeciej bryły, która wynosiła ostatecznie: $P_3 = 24\frac{184}{243} \cdot a^2$

Były różne podejścia do obliczenia objętości i pola powierzchni kolejnych brył.
Rozwiązania tego zadania, jakie przedstawili uczniowie, były obszerne i szczegółowe.
Zdecydowanie łatwiej było obliczyć powierzchnię pierwszej bryły. Przy drugiej bryle potrzeba było więcej wyobraźni – należało jakby przenieść rozumowanie dotyczące pierwszej bryły na 20 mniejszych kostek, tworzących bryłę drugą. Nawet przy błędach rachunkowych, jak tez pominięcia niektórych ścianek, premiowana punktowo była twórcza analiza problemu.
Kilkunastu uczniów przedstawiło gotowy wzór na obliczenie tych powierzchni. Takim propozycjom przyznawano mniejszą liczbę punktów.

Zadanie 1 [PP etap wojewódzki]

Na ekranie telefonu komórkowego podawany jest czas w formacie 24-godzinnym – widoczne są godziny i minuty w postaci □□**:**□□ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że na telefonie pojawi się czas, w którym godziny i minuty będą przedstawione za pomocą różnych cyfr?

Zadanie w modelowym schemacie oceniania uznane było za łatwe. Najczęściej uczniowie przedstawiali 2 podejścia do rozwiązania problemu: (1) dla konkretnych godzin dobierano odpowiednio cyfry minut, aby spełnione były warunki zadania, (2) albo dla „dziesiątków" godzin, np. 0__, 1__, 2__, dobierano cyfry „jednostek" godzin i minut.
W wielu przypadkach problemem było określenie, ile jest możliwych wszystkich przypadków pokazywania czasu na zegarze w komórce, czyli że było ich 1440.
Rozumowanie jest następujące:
Doświadczenie losowe (Ω) – czas pokazywany przez zegar na komórce: $|\Omega| = 24 \cdot 60$
Zdarzenie oczekiwane (CZ) – czas pokazywany przez zegar na komórce, w którym będą różne cyfry.
W dalszej analizie poddamy następujące zdarzenia:

- zdarzenie A – czas pokazywany jako godziny, które mają różne cyfry czyli 2 rozłączne zdarzenia A_1 i A_2, dla których $A_1 + A_2 = A$ oraz $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- zdarzenie B – czyli czas pokazywany jako minuty, które różnią się cyframi, ale też różnią się cyframi od czasu pokazywanego jako godziny czyli 2 rozłączne zdarzenia B_1 i B_2.

$A_1 = \{01,02,03,04,05,10,12,13,14,15,20,21,23\}, \quad n(A_1) = 13$
$A_2 = \{06,07,08,09,16,17,18,19\}, \quad n(A_2) = 8$
Aby pokazywany czas miał różne cyfry, to:

- dla zdarzenia A_1 dobierana jest 1 cyfra spośród 4 cyfr dziesiątek minut oraz 1 cyfra spośród 7 jedności minut, czyli $n(B_1) = 4 \cdot 7$
- dla zdarzenia A_2 dobierana jest 1 cyfra spośród 5 cyfr dziesiątek minut oraz 1 cyfra spośród 7 jedności minut, czyli $n(B_2) = 5 \cdot 7$

Wtedy:

$$P(CZ) = \frac{n(A_1) \cdot n(B_1) + n(A_2) \cdot n(B_2)}{|\Omega|}$$

$$P(CZ) = \frac{13 \cdot 4 \cdot 7 + 8 \cdot 5 \cdot 7}{24 \cdot 60} = \frac{28 \cdot (13 + 10)}{24 \cdot 60} = \frac{28 \cdot 23}{24 \cdot 60} = \frac{161}{360}$$

Zadanie 2 [PP etap wojewódzki]

Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 21 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 27 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 23 \end{cases}$, jeżeli wiadomo, że $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in C_+$ i że rozwiązania równania spełniają warunek: $x_3 + x_4 < x_1 + x_2 + x_5 < 25$

Układ 4 równań zawierał 5 zmiennych. A to powinno było sugerować, że należy którąś zmienną uzależnić od pozostałych, rozszerzając np. układ do 5 równań.

Uczniowie przedstawili dość długie rozwiązania, przekształcając, dodając i odejmując stronami poszczególne równania. W końcowej fazie rozwiązania wykorzystywali nierówność (podaną jako warunek dla układu równań), aby przeprowadzić analizę układu 2 nierówności z jedną zmienną, podstawiając swoje wyliczenia do układu nierówności:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 < x_1 + x_2 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_5 < 25 \end{cases}$$

Metoda ta wymagała wielu przekształceń, podczas których łatwo było o pomyłkę. Jednak w wielu przypadkach dawała efekty, czyli pożądane rozwiązanie układu równań.

Rozumowanie jest następujące:

sumujemy stronami równania tego układu i otrzymujemy:

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 86$$
$$2(x_1 + x_2 + x_5) + 3(x_3 + x_4) = 86$$

Zgodnie z podanym warunkiem zadania, dotyczącym rozwiązań układy równań, przyjmujemy, że: $a = x_1 + x_2 + x_5$ i $b = x_3 + x_4$, gdzie $b < a < 25$ i $a, b \in C_+$

Otrzymujemy równanie z 2 niewiadomymi: $2a + 3b = 86$, skąd $b = \frac{86}{3} - \frac{2}{3}a$ (**).

Budujemy tabelę, aby „dobrać” odpowiednie wartości *a* i *b*, spełniające równość (**), czyli uzależnić zmienną *b* od zmiennej *a*:

a < 25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
$b < a$	$\frac{86}{3} - \frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{38}{3}$	$\frac{40}{3}$	14	$\frac{44}{3}$	$\frac{46}{3}$	16	$\frac{50}{3}$	$\frac{52}{3} = 17\frac{1}{3}$	$\frac{54}{3} = 18$	$\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

Równość jest spełniona dla par liczb:

$\begin{cases} a = 22 \\ b = 14 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 19 \\ b = 16 \end{cases}$

Stąd otrzymujemy: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 22 \\ x_3 + x_4 = 14 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 19 \\ x_3 + x_4 = 16 \end{cases}$

Otrzymanie równania dołączamy do układu równań (*) – w ten sposób mamy do rozwiązania 2 układy, składające się z 6 równań z 5 niewiadomymi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 21 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 27 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 23 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 22 \\ x_3 + x_4 = 14 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 21 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 27 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 23 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 19 \\ x_3 + x_4 = 16 \end{cases}$$

Układy te można rozwiązywać na różne sposoby.

Np. z porównania równania II i VI mamy, że: $x_2 = 7$ lub $x_2 = 5$;

z porównania równania III i VI mamy, że: $x_5 = 13$ lub $x_5 = 11$ itd.

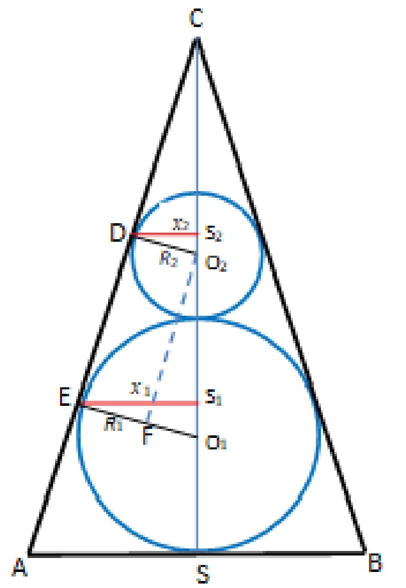
Tak więc po przekształceniach i obliczeniach, ostatecznie rozwiązaniem układu równań (*) są dwie piątki liczb:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = 7} \\ \boldsymbol{x_3 = 6} \\ \boldsymbol{x_4 = 8} \\ \boldsymbol{x_5 = 13} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 3} \\ \boldsymbol{x_2 = 5} \\ \boldsymbol{x_3 = 7} \\ \boldsymbol{x_4 = 9} \\ \boldsymbol{x_5 = 11} \end{cases}.$$

<u>Zadanie 5 [PP etap wojewódzki]</u>

Na kulach o promieniach R_1 i R_2 stycznych zewnętrznie opisano stożek. Przez punkty styczności kul do powierzchni bocznej stożka poprowadzono płaszczyzny równoległe do podstawy stożka. Oblicz pole powierzchni bocznej tak powstałego stożka ściętego, którego podstawami są okręgi utworzone przez punkty styczności kul z powierzchnią boczną stożka.

W zadaniu tym największym problemem było graficzne przedstawienie problemu – najprościej było wykreślić przekrój osiowy stożka z wpisanymi w niego kulami i zaznaczyć na nim przekroje płaszczyznami (tu widoczne będą jako proste równoległe). Z kolei na rysunku należało dostrzec trójkąty podobne i przeanalizować zachodzące między bokami tych trójkątów.
Przekrojami stożka są koła, których promienie zaznaczone są na rysunku jako odcinki r_1, r_2.



Przyjmujemy oznaczenia:

ΔABC – trójkąt równoramienny będący przekrojem osiowym stoż

C – wierzchołek stożka

R_1, R_2 – promienie kul, na których opisano stożek, zakładamy, że R_1
R_2

O_1, O_2 – środki kul, na których opisano stożek

S_1, S_2 – środki podstaw stożka ściętego powstałego w wyniku prz

r_1, r_2 – promienie podstaw stożka ściętego, gdzie $r_1 > r_2$

D – punkt styczności mniejszej kuli z powierzchnią boczna stożka,

E – punkt styczności większej kuli z powierzchnią boczną stożka

$|CE| = l_1, \quad |CD| = l_2, |DE| = l_1 - l_2$

$|ES_1| = r_1, \ |EO_1| = R_1, |DS_2| = r_2, |DO_2| = R_2$

Płaszczyzny przekroju dzielą stożek na 3 części – 1 stożek (podobny do wyjściowego) i 2 stożki ścięte. Zadaniem jest obliczenie pola powierzchni bocznej stożka ściętego ograniczonego kołami i promieniach r_1, r_2 (koła są podstawą dolną i górną tego stożka ściętego).
Powierzchnia boczna stożka ściętego będzie wyrażała się wzorem:

$$P_b = \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$$

Analizujemy trójkąt ΔFO_1O_2 , skąd mamy:

$$|FO_2| = |DE| = l_1 - l_2, \qquad |FO_1| = R_1 - R_2, \quad |O_1O_2| = R_1 + R_2$$

Wykorzystujemy twierdzenie Pitagorasa i po przekształceniach otrzymujemy, że:

$$l_1 - l_2 = |FO_2| = 2\sqrt{R_1R_2}$$

Dostrzegamy trójkąty podobne:

$\Delta\ CEO_1$, $\Delta\ CDO_2$, $\Delta\ ES_1O_1$, $\Delta\ DS_2O_2$, ΔFO_1O_2

dla których przeprowadzamy analizę zależności między odpowiednimi bokami – dla $\Delta FO_1O_2 \sim \Delta ES_1O_1$, $\Delta FO_1O_2 \sim \Delta DS_2O_2$, $\Delta FO_1O_2 \sim \Delta CEO_1$.

Przy odpowiednich przekształceniach otrzymujemy, że:

$l_1 = \frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2}$ i $l_2 = \frac{2R_2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2}$

Podstawiamy wyznaczone wielkości do wzoru na powierzchnię boczną stożka ściętego:

$$P_b = \pi\left(\frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2} \cdot \frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2} - \frac{2R_2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2} \cdot \frac{2R_2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2}\right) = \pi \cdot \frac{4{R_1}^3R_2 - 4{R_2}^3R_1}{{R_1}^2 - {R_2}^2} = \pi \cdot \frac{4R_1R_2\left({R_1}^2 - {R_2}^2\right)}{{R_1}^2 - {R_2}^2}$$

Ostatecznie pole powierzchni bocznej stożka ściętego, ograniczonego płaszczyznami przekroju, jest równe: $\boldsymbol{P_b = 4\pi R_1R_2}$

Jerzy Paczkowski

Ekspert Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* w zakresie matematyki. Nauczyciel dyplomowany, doradca metodyczny z matematyki, a następnie konsultant ODN ds. diagnozy i edukacji matematycznej w latach 1993-2018. Nauczyciel matematyki w szkole podstawowej i w szkole średniej. Egzaminator egzaminów maturalnych i gimnazjalnych z matematyki. Członek Polskiego Towarzystwa Diagnostyki Edukacyjnej.