

## POMORSKA LIGA ZADANIOWA ZDOLNI Z POMORZA

Konkurs dla uczniów klas VII i VIII szkoły podstawowej województwa pomorskiego  
w roku szkolnym 2019/2020

**Etap II – powiatowy**

**Przedmiot: MATEMATYKA**

**Instrukcja dla ucznia**

**Zanim przystąpisz do rozwiązywania testu, przeczytaj uważnie poniższą instrukcję.**

1. Arkusz testowy zawiera **5** zadań.
2. Za zadania z arkusza można uzyskać łącznie 50 punktów.
3. Pisz czytelnie. Rozwiązania zadań przedstaw w takiej formie, żeby można było odczytać je bez problemu.
4. Wszystkie rozwiązania zadań zamieść w jednym pliku o nazwie imię\_nazwisko\_miejscowość (w formacie \*.doc, \*.docx, \*.pdf) i prześlij na adres mailowy: [matematyka\\_plz\\_SP@odn.slupsk.pl](mailto:matematyka_plz_SP@odn.slupsk.pl). Pliki w postaci zdjęć nie będą uwzględniane.

**Życzymy powodzenia!**

### Zadanie 1. (0-8p.)

Do basenu doprowadzana jest woda dwoma kranami – jednym z wodą zimną, a drugim z wodą podgrzaną. Basen napełnia się wodą zimną w ciągu 5 godzin, a wodą podgrzaną w ciągu 8 godzin. W ciągu dnia pusty dotąd basen postanowiono napełnić. Najpierw basen napełniano przez 2 godziny wodą zimną, potem przez 1 godzinę wodą podgrzaną. W międzyczasie zauważono nieszczelność w zaworze odpływu wody z basenu – woda odpływała w tempie  $1/10$  objętości basenu na godzinę, przez cały czas napełniania go wodą. Wstrzymano napełnianie basenu wodą, uszczelniono odpływ wody, a następnie przystąpiono ponownie do napełniania basenu. Dla przyspieszenia napełniania basenu wlewano wodę z obu kranów i dodatkowo węże z kranu ogrodowego. Łącznie napełnienie całego basenu trwało 5 godzin 4 minuty, nie licząc przerwy na naprawę zaworu odpływu.

Jakie było tempo napełniania basenu wężem z kranu ogrodowego? Ile czasu trwałyby napełnianie pustego basenu jednocześnie wodą podgrzaną i wodą zimną? A ile, gdyby jednocześnie napełniano basen wodą podgrzewaną, wodą zimną i wodą z węża ogrodowego? Przedstaw swój tok rozumowania i obliczenia.

### Zadanie 2. (0-10p.)

Dane są dwie liczby:

$$a = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{2013 \cdot 2015} + \frac{2}{2015 \cdot 2017} + \frac{2}{2017 \cdot 2019}$$

$$b = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2018}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2019}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2020}\right)$$

Rozwiąż równanie:  $\frac{1}{ab} - \frac{x}{b} = 2020 \cdot \frac{1-a}{a}$

### Zadanie 3. (0-12p.)

Dany jest sześcian o krawędzi  $a$ . Przez bryłę poprowadzono dwie płaszczyzny: a) jedna przechodzi przez przekątną podstawy górnej i 1 wierzchołek podstawy dolnej, b) druga przechodzi przez tę samą przekątną podstawy górnej i 1 wierzchołek podstawy dolnej. Obie płaszczyzny nie pokrywają się. W ten sposób odcięto 2 naroża sześcianu.

Wykaż, że odcinek łączący środki ciężkości większych trójkątów jest równoległy do jednej ze ścian sześcianu. Oblicz, jaki jest stosunek długości tego odcinka do długości krawędzi sześcianu.

Oblicz pole powierzchni i objętość bryły, otrzymanej po ścięciu naroży. Przedstaw tok swojego rozumowania i obliczenia.

#### Zadanie 4. (0-8p.)

Rozstrzygnij, czy:

- a) liczba  $5^{100}$  ma nie więcej niż 70 cyfr,
- b) liczba  $2019^{100}$  ma mniej niż 330 cyfr.

Przedstaw tok rozumowania i obliczenia.

#### Zadanie 5. (0-12p.)

Z przeciwległych wierzchołków prostokąta o bokach długości  $a$  i  $b$ , gdzie  $a < b$ , poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te podzieliły przekątną na trzy równe części. Znajdź stosunek długości boków tego prostokąta. Zapisz obliczenia.

Następnie prostokąt ten obracano wokół przekątnej. Znajdź objętość otrzymanej bryły obrotowej. Wynik uzależnij od długości jednego z boków prostokąta. Przedstaw swój tok rozumowania i zapisz obliczenia.